12. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy 5×5-ös méretű négyzetrácson véletlenszerűen megjelölünk két 1×1-es méretű rácsnégyzetet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) *mindkét négyzet a négyzetrács szélén van;* b) *a kiválasztott négyzeteknek nincsen közös oldala?*

a) Az 5×5-ös méretű négyzetrács összesen 25 darab 1×1-es méretű rácsnégyzetet tartalmaz. Ezek közül 16 darab található a négyzetrács szélén.	1 pont
Két „kis négyzetet” összesen $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$-féleképp lehet megjelölni a négyzetrácson.	2 pont
A kedvező esetek száma: $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$.	2 pont
Annak a valószínűsége, hogy mindkét négyzet a négyzetrács szélén van: $$p = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}.$$	1 pont
b) Minden sorban 4 pár 1×1-es méretű rácsnégyzet van, amelyeknek van közös oldala, így a sorokban összesen 20 pár ilyen négyzetet találunk. Ugyanígy 20 párat találunk az oszlopokban is, tehát összesen 40 olyan pár van, amelyeknek van közös oldala.	2 pont
Ebből következik, hogy azoknak a pároknak a száma, amelyeknek nincsen közös oldala $300 - 40 = 260$.	1 pont
A keresett valószínűség így $$p = \frac{260}{300} = \frac{13}{15}.$$	1 pont
Összesen:	**10 pont**

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre a $$\frac{2023! \cdot 2024!}{n}$$ *tört értéke négyzetszám?*

Mivel $2024! = 2023! \cdot 2024$,	1 pont
és $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$,	1 pont
ezért a törtet felírhatjuk $$\frac{(2023!)^2 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 23}{n}$$ alakban.	2 pont
A $(2023!)^2$ prímtényezős felbontásában szereplő prímek kitevője páros,	2 pont
ezért a tört számlálójában szereplő szorzat prímtényezős felbontásában a 2, a 11 és a 23 kitevője páratlan, a többi prímé páros.	1 pont

Ahhoz, hogy a tört értéke négyzetszám legyen szükséges, hogy *n* prímtényezős felbontásában a 2, a 11 és a 23 páratlan kitevőn szerepeljen.	2 pont
A legkisebb ilyen szám az $n = 2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

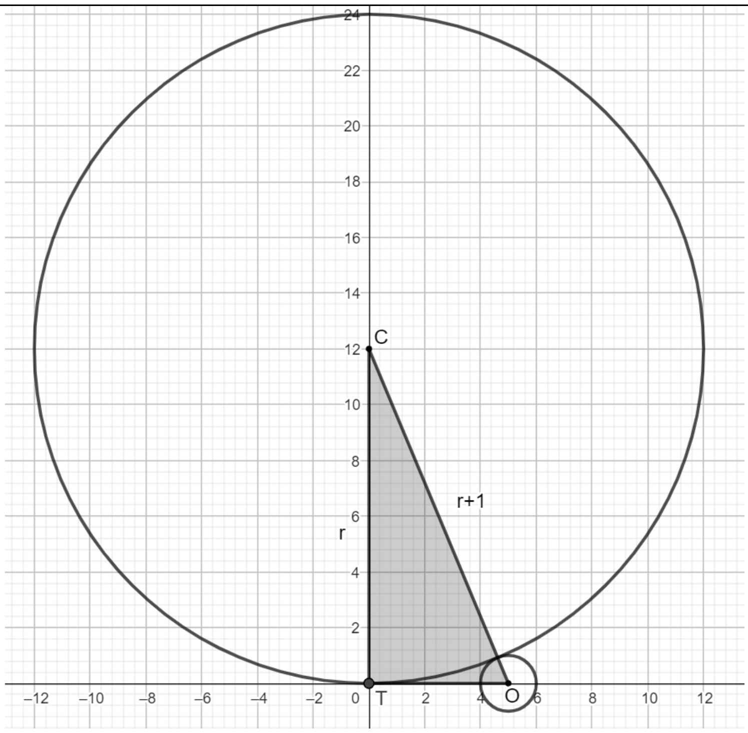
3. *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet.*

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 450 \\ 3xy + 9y^2 = 450 \end{cases}$$

Az egyenletek bal oldalán álló kifejezések szorzattá bonthatók: $\begin{cases} x(x + 3y) = 450 \\ 3y(x + 3y) = 450 \end{cases}$	2 pont
Osszuk el az első egyenlet két oldalát a második egyenlet megfelelő oldalával, így azt kapjuk, hogy $\frac{x}{3y} = 1,$ $x = 3y.$	2 pont
Eredményünket az első egyenletbe helyettesítve $(3y)^2 + 9y^2 = 450,$ és így $y^2 = 25.$	2 pont
A fenti egyenlet megoldásai: $y = 5$, és $y = -5$.	2 pont
Az egyenletrendszernek két megoldása van: $x = 15, y = 5$, illetve $x = -15, y = -5$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott számok az egyenletrendszernek megoldásai.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

4. *Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az x-tengelyt az origóban érinti, továbbá érinti az $O(5; 0)$ középpontú, 1 egység sugarú kört is.*

A kör érintője merőleges az érintési ponthoz vezetett sugárra, valamint a kör az *x*-tengelyt az origóban érinti, ezért a kör középpontja az *y*-tengelyen van.	1 pont
Ha a keresett kör középpontja az *y*-tengely pozitív felén van, továbbá középpontját *C*, az origót pedig *T* jelöli, akkor az *OCT* derékszögű háromszög oldalai: $TC = r, TO = 5, CO = r + 1$.	2 pont



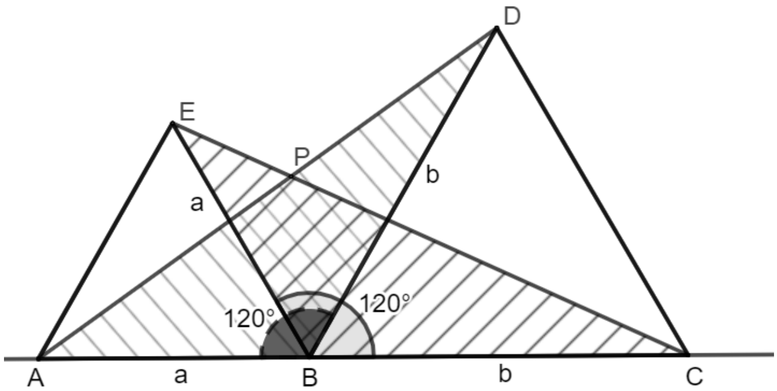
Írjuk fel Pitagorasz tételét az *OCT* háromszögre: $$r^2+5^2=(r+1)^2.$$	2 pont
A műveletek elvégzése után $$r^2+25=r^2+2r+1,$$	1 pont
amiből $r=12$ adódik.	1 pont
A keresett kör egyenlete: $$x^2+(y-12)^2=144.$$	1 pont
Ha a kapott kört az *x*-tengelyre tükrözzük, akkor olyan körhöz jutunk, amely szintén megfelel a feltételeknek, ezért a feladatnak két megoldása van.	1 pont
A másik megfelelő kör egyenlete: $$x^2+(y+12)^2=144.$$	1 pont
Összesen:	**10 pont**

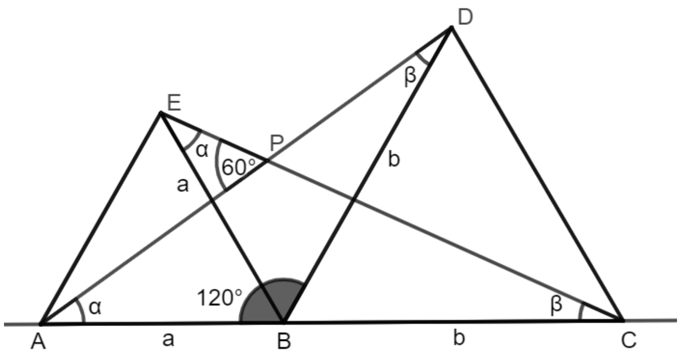
5. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.* $$5^{10x+2}-6\cdot 5^{9x+1}+5^{8x+1}=0$$

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést a hatványozás azonosságai alapján átalakítjuk: $$5^2\cdot 5^{10x}-6\cdot 5\cdot 5^{9x}+5\cdot 5^{8x}=0,$$	1 pont
majd kiemelünk: $$5\cdot 5^{8x}\cdot(5\cdot 5^{2x}-6\cdot 5^x+1)=0.$$	2 pont
Mivel $5^{8x}>0$ minden *x*-re teljesül,	1 pont
ezért $$5\cdot 5^{2x}-6\cdot 5^x+1=0.$$	1 pont

A kapott egyenlet $y = 5^x$-ben másodfokú,	1 pont
amelynek megoldásai $y = 1$ és $y = \frac{1}{5}$.	1 pont
Ha $5^x = 1$, akkor $x = 0$, és ha $5^x = \frac{1}{5}$, akkor $x = -1$. Az egyenletnek két megoldása van: $x = 0$, valamint $x = -1$.	2 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott gyökök az eredeti egyenletnek megoldásai.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

6. Az A, B és C pontok az adott sorrendben egy egyenesre illeszkednek. Az E és D pontok az egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkednek el úgy, hogy az ABE és a BCD háromszögek szabályosak. Az AD és CE szakaszok metszéspontja P. a) *Bizonyítsuk be, hogy AD=CE.* b) *Bizonyítsuk be, hogy az ABPE négyszög húrnégyszög.*

a) Az ábrának megfelelően az *AB* hosszát *a*-val, a *BC* szakasz hosszát *b*-vel jelöljük.  Az ABE és BCD háromszögek szabályosak, ezért $AB = BE = a$ és $BC = BD = b$, továbbá $ABD\angle = EBC\angle = 120°$, így az ABD és EBC háromszögek két-két oldalban, valamint az általuk közre fogott szögben megegyeznek, ezért	2 pont
az *ABD* és *EBC* háromszögek egybevágók egymással.	1 pont
Az egybevágóságból következik, hogy harmadik oldaluk is megegyezik, azaz $AD = CE$.	1 pont

b) Jelöljük az *ABD* háromszög hegyesszögeit az ábrának megfelelően α-val, illetve β-val. Ekkor $\alpha + \beta = 60°$. 	1 pont
Mivel az *ABD* háromszög egybevágó az *EBC* háromszöggel, ezért $BEC\angle = \alpha$ és $BCE\angle = \beta$ is teljesül.	1 pont
Ekkor viszont az *ACP* háromszög hegyesszögei α-val, illetve β-val egyenlők, ezért a *P* csúcsnál lévő külső szögére $APE\angle = \alpha + \beta = 60°$.	1 pont
Az *AE* szakasz a *B* és *P* pontokból is 60°-os szög alatt látszik, ezért *P* és *B* illeszkedik az *AE* szakasz 60°-os látószögkörívére,	2 pont
amiből következik, hogy az *ABPE* négyszög húrnégyszög.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

<u>Megjegyzés</u>: A b) feladat első 3 pontját akkor is megkaphatja a versenyző, ha észreveszi, hogy az ABD háromszög a B csúcs körüli $-60°$*-os forgatással vihető át az EBC háromszögbe, továbbá hivatkozik arra, hogy az AD szakasz és elforgatott képe, azaz az EC szakasz pontosan a forgatás szögét zárja be egymással.*