

## 12. évfolyam technikum

### I. forduló

1. Egy  $5 \times 5$ -ös méretű négyzetrácson véletlenszerűen megjelölünk két  $1 \times 1$ -es méretű rácsnégyzetet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- mindkét négyzet a négyzetrács szélén van;
  - a kiválasztott négyzeteknek nincsen közös oldala?

(10 pont)

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész  $n$  szám, amelyre a

$$\frac{2023! \cdot 2024!}{n}$$

tört értéke négyzetszám?

(10 pont)

3. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 450 \\ 3xy + 9y^2 = 450 \end{cases}$$

(10 pont)

4. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az  $x$ -tengelyt az origóban érinti, továbbá érinti az  $O(5; 0)$  középpontú, 1 egység sugarú kört is.

(10 pont)

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$5^{10x+2} - 6 \cdot 5^{9x+1} + 5^{8x+1} = 0$$

(10 pont)

6. Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok az adott sorrendben egy egyenesre illeszkednek. Az  $E$  és  $D$  pontok az egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkednek el úgy, hogy az  $ABE$  és a  $BCD$  háromszögek szabályosak. Az  $AD$  és  $CE$  szakaszok metszéspontja  $P$ .

- Bizonyítsuk be, hogy  $AD=CE$ .
- Bizonyítsuk be, hogy az  $ABPE$  négyszög húrnégyszög.

(10 pont)