Logaritmikus egyenlőtlenségek és egyenlőtlenség – rendszerek

Megoldások

1. Melyik nagyobb:

$$\left(log_2 5\right)^2 \quad \text{vagy} \quad log_2 20\ ?$$

Megoldás:

Vegyük a két szám különbségét, közben felhasználjuk, hogy

$log_2 20 = log_2 (4 \cdot 5) = 2 + log_2 5$, így

$$\left(log_2 5\right)^2 - log_2 20 = \left(log_2 5\right)^2 - log_2 5 + 2 = log_2 5 \cdot \left(log_2 5 - 1\right) + 2 =$$

$= log_2 5 \cdot log_2 \dfrac{5}{2} + 2 > 0,$ mivel mindkét tag pozitív, ezért

$\left(log_2 5\right)^2 > log_2 20$.

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$6lg^2 6 > 25(lg 2) \cdot lg 3$$

Megoldás:

Igazolni kell, hogy $6(lg 3 + lg 2) - 25(lg 2) \cdot lg 3 > 0$ igaz.

Átalakítások után kapjuk, hogy

$$6lg^2 3 - 13(lg 2) \cdot lg 3 + 6lg^2 2 > 0 \quad /{:}log^2 2 > 0,$$

$$6\left(\frac{log 3}{log 2}\right)^2 - 13 \cdot \frac{log 3}{log 2} + 6 > 0,$$

$$6log_2^2 3 - 13log_2 3 + 6 > 0.$$

Legyen $log_2 3 = a$, ahol $a > 0$. ekkor

$$6a^2 - 13a + 6 > 0.$$

A bal oldal zérushelyei $a_1 = \dfrac{3}{2},\ a_2 = \dfrac{2}{3}$, ezért az egyenlőtlenségünk az $a > 0$ feltétel miatt csak $a > \dfrac{3}{2}$ esetben mindig igaz, ezért az eredeti egyenlőtlenség is igaz

$6lg^2 3 - 13(lg 2) \cdot lg 3 + 6lg^2 2 > 0$

3. Bizonyítsuk be, hogy

$$lg 1 - lg 2 + lg 3 - lg 4 + ... + lg 99 - lg 100 < -1$$

Megoldás:

Az egyenlőtlenség bal oldala így is írható:

$$lg\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 100}$$

Tekintsük a következő egyenlőtlenségeket:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3};$$

$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5};$$

$$\frac{5}{6}<\frac{6}{7};$$

.

.

.

$$\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$$

Ezeket összeszorozva a következőt kapjuk:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 100}<\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 100}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot 101}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a baloldali kifejezéssel:

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 100}\right)^2<\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot ...\cdot 100}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot ...\cdot 101}=\frac{1}{101}<\frac{1}{100},$$

ahonnan $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 100}<\frac{1}{10}$, amit logaritmizálva adódik az állítás, hiszen $lg\frac{1}{10}=-1$.

4. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a pozitív valós számok halmazán:

$$4x+log_2 9>log_2\left(9\cdot 2^{2x+1}-5\right)$$

Megoldás:

Az egyes egyenlőtlenségekben szereplő kifejezések értelmezését általában külön nem vizsgáljuk, a megoldás helyességéről ellenőrzéssel győződünk meg.

Egyenlőtlenségünk a következő alakba is írható:

$$4x=log_2 2^{4x}>log_2\left(2^{2x+1}-\frac{5}{9}\right)$$

A $log_2 x$ függvény értelemzését és a szigorú monotonitását felhasználva a következőnek kell teljesülni:

$2^{2x+1}-\frac{5}{9}>0$ és $2^{4x}>2\cdot 2^{2x}-\frac{5}{9}$, melyek átalakításával a következőt kapjuk:

$4^x>\frac{5}{18}$ és $\left(4^x\right)^2-2\cdot 4^x+\frac{5}{9}>0,$

$x>log_4\frac{5}{18}$ és $4^x<\frac{1}{3}$ vagy $4^x>\frac{5}{3}$.

A kapott eredményeket össze kell vetni az $x>0$ feltétellel!

5. $$log_2 log_4 x+log_4 log_2 x\le 2$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt fel kell tennünk, hogy $log_2 x>0$, azaz $x>1$.Áttérve mindenütt 2-es alapra:

$$log_2 log_2 x-1+\frac{log_2 log_2 x}{2}\le 2, \text{ ahonnan}$$

$$log_2 log_2 x\le 2.$$

Mivel a 2-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$log_2 x\le 4,\quad x\le 16.$$

Figyelembe véve a kikötést, az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $1<x\le 16$.

6. $$\left[lg\left(x+1\right)\right]^4-4\left[lg\left(x+1\right)\right]^2+3\le 0$$

Megoldás:

Látható, hogy $x>-1$ feltétel mellett $\left[lg\left(x+1\right)\right]^2$-re nézve másodfokú egyenlőtlenség, melynek megoldása figyelembe véve a bal oldal zérushelyeit: 1 és 3 -

$$1\le\left[log_2\left(x+1\right)\right]^2\le 3 \text{ azaz } 1\le\left|log_2\left(x+1\right)\right|\ge\sqrt{3}.$$

Felbontva az abszolút értéket két egyenlőtlenséghez jutunk:

$$log_2 2^{-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}\le log_2\left(x+1\right)\le 1 \text{ vagy } log_2 2=1\le log_2\left(x+1\right)\le\sqrt{3}=log_2 2^{\sqrt{3}},$$

melyek megoldása: $\frac{1}{2^{\sqrt{3}}}-1\le-\frac{1}{2}$ vagy $1\le x\le 2^{\sqrt{3}}-1.$

Mivel mindkét kapott eredmény eleget tesz a kikötésnek, egyben ez a megoldása a feladatnak.

7. $$2\,log_{\frac{1}{3}}\left(log_2 x\right)>log_{\frac{1}{3}}\left(6-log_2 x\right)$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt $log_2 x > 0$ és $6 > log_2 x$, azaz $1 < x < 64.$

Használva a logaritmus azonosságot a következő alakba írható az egyenlőtlenség:

$$log_{\frac{1}{3}} \left(log_2 x \right)^2 > log_{\frac{1}{3}} \left(6 - log_2 x \right)$$

Mivel 1-nél kisebb alap esetén a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$\left(log_2 x \right)^2 < 6 - log_2 x,$$
$$\left(log_2 x \right)^2 + log_2 x - 6 < 0.$$

Figyelembe véve a bal oldal zérushelyeit az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha $-3 < log_2 x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < 4.$

A kikötést figyelembe véve a megoldás: $1 < x < 4.$

8. $$log_{\frac{1}{2}} \left(4 - x \right) \geq log_{\frac{1}{2}} 2 - log_{\frac{1}{2}} \left(x - 1 \right)$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt $1 < x < 4$. A logaritmus azonosságát használva:

$$log_{\frac{1}{2}} \left(4 - x \right) \geq log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x - 1}.$$

Mivel 1-nél kisebb alap esetén a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$4 - x \leq \frac{2}{x - 1}.$$

A kikötés miatt $x - 1 > 0$, ezért a vele történő szorzás ekvivalens átalaktás:

$$\left(4 - x \right)\left(x - 1 \right) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

A bal oldal zérushelye 2 és 3, ezért a megoldás a kikötés figyelembe vételével:

$$1 < x \leq 2 \text{ és } 3 \leq x < 4.$$

9. $$\left(x^2 + 13{,}3x + 44{,}1 \right)\sqrt{log_{0,3} \left| x + 6 \right|} \geq 0$$

Megoldás:

A négyzetgyök fogalma miatt $log_{0,3} \left| x + 6 \right| \geq 0$ lehet, ezért $x^2 + 13{,}3x + 44{,}1 \geq 0$ egyenlőtlenségnek is teljesülni kell.

Mivel $log_{0,3} \left| x + 6 \right|$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$0 < | x+6 | \le 1$, ahonnan $-7 \le x < -6$ vagy $-6 < x \le -5$ következik.

Az $x^2 + 13{,}3x + 44{,}1 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = -6{,}3$; $x_2 = -7$.

Az $x^2 + 13{,}3x + 44{,}1 \ge 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x \le -7$ vagy $x \ge -6{,}3$.

a kikötések figyelembe vételével a megoldás:

$x \in \left]-6;-5\right] \bigcup$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

10. $\qquad log_3(1+x) > \left[1 - log_x(1-x)\right] \cdot log_3 x$

Megoldás:

A logaritmus fogalma miatt fel kell tennünk, hogy $0 < x < 1$. Áttérve 3-as alapra egyenlőtlenségünk a következő alakot ölti:

$$log_3(1+x) > \left[1 - \frac{log_3(1-x)}{log_3 x}\right] \cdot log_3 x,$$

$$log_3(1+x) > log_3 x - log_3(1-x),$$

$$log_3(1+x) > log_3 \frac{x}{1-x}.$$

Mivel 1-nél nagyobb alap esetén a logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

$1 + x > \dfrac{x}{1-x}$, ahonnan az x – re vonatkozó kikötés miatt

$1 - x^2 > x, \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 < 0.$

Zérushelyek alapján az előzetes kikötésekre tekintettel a megoldás:

$$0 < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

11. $>$ $\qquad \sqrt{2 + log_x 9} \cdot log_{\frac{1}{3}} x < 2$

Megoldás:

Fel kell tenni, hogy $x > 0$ és $2 + log_x 9 = 2 + \dfrac{2}{log_3 x} \ge 0$. Utóbbi akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{1 + log_3 x}{log_3 x} \ge 0 \Leftrightarrow log_3 x > 0 \text{ és } 1 + log_3 x \ge 0 \text{ vagy } log_3 x < 0 \text{ és } 1 + log_3 x \le 0 .$$

A kikötés első része $x > 1$ és $x \ge \dfrac{1}{3}$ esetén teljesül, a második rész pedig $0 < x < 1$ és

$x \le \frac{1}{3}$ esetén. Így a végső kikötés: $x > 1$ vagy $0 < x \le \frac{1}{3}$.

Az eredeti egyenlőtlenség felírható a következő alakban is:

$$\sqrt{\frac{2\left(1+log_3 x\right)}{log_3 x}}\left(-log_3 x\right)<2.$$

Ha $x > 1$, akkor $log_3 x > 0$, ezért $-log_3 x < 0$, vagyis az egyenlőtlenség igaz.

Ha viszont $log_3 x < 0$, akkor az egyenlőtlenség baloldala nemnegatív, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$\frac{2\left(1+log_3 x\right)}{log_3 x}\cdot log_3^2 x < 4$$

$$\left(1+log_3 x\right)log_3 x < 2$$

$$log_3^2 x + log_3 x - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < log_3 x < 1$$

12. $$log_a x + log_a\left(x-2\right) > 1$$

Megoldás:

A logaritmus fogalma miatt $0 < a < 1$ vagy $a > 1$ lehet és még $x > 2$ feltevéssel kell élni.

Ha $a > 1$ akkor a logaritmus függvény szigorúan monoton nő, vagyis az eredeti egyenlőtlenségből $x\left(x-2\right) > a$ következik.

$$x^2 - 2x - a > 0.$$

Az egyenlőtlenség szóba jövő megoldása: $x > 1+\sqrt{1+a}$.

Ha $0 < a < 1$, akkor az $log_a x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért az ezért az eredeti egyenlőtlenségből az $x^2 - 2x - a < 0$ adódik.

Az $x-$re tett megjegyzés miatt a szóba jöhető megoldás:

$$2 < x < 1+\sqrt{1+a}.$$

Összefoglalva a megoldásokat:

Ha $0 < a < 1$, akkor $2 < x < 1+\sqrt{1+a}$;

Ha $a > 1$, akkor $x > 1+\sqrt{1+a}$.

13. $$log_a^2\left(x^{\sqrt{x}}\right) > log_a\left(a^{4x}\cdot x^{3x}\right), \text{ ahol } a > 1$$

Megoldás:

Fel kell tenni, hogy $x > 0$. Egyenlőtlenségünk más alakba is írható:

$$\left(\sqrt{x}\,log_a x\right)^2 > 4x + 3x\,log_a x$$
$$x\,log_a^2 x > x\left(4 + 3\,log_a x\right).$$

Mivel $x > 0$, ezért

$$log_a^2 x > 4 + 3\,log_a x,$$
$$log_a^2 x - 3\,log_a x - 4 > 0.$$

baloldal zérushelyeit meghatározva: $log_a x = 4;\ log_a = -1$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $log_a x < -1$ vagy $log_a x > 4$, ahonnan a feltételek alapján:

$$0 < x < \frac{1}{a} \text{ vagy } x > a^4.$$

14. $$log_{2x+4}\left(x^2 - x\right) > 1$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezés miatt az alábbi kikötéseket kell tennünk:

$2x + 4 > 0,\ 2x + 4 \neq 1,\ x^2 - x > 0$, melyekből

$0 > x > -2,\ x \neq -1{,}5;$ vagy $x > 1$ adódik.

A logaritmus alapja miatt két esetet kell vizsgálni.

a) Ha $2x + 4 > 1$, azaz $x > -1{,}5$ akkor a logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$x^2 - x > 2x + 4$$
$$x^2 - 3x - 4 > 0 \iff -1{,}5 < x < -1 \text{ vagy } x > 4.$$

b) Ha $0 < 2x + 4 < 1,$ azaz $-2 < x < -1{,}5$ esetben a logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, így az eredeti egyenlőtlenségből a következő adódik:

$$x^2 - 3x - 4 < 0 \iff -1 < x < 4.$$

Mivel $]-2;\ -1{,}5[\ \bigcap$, ezért a b) esetből nem adódik további megoldás.

15. $$log_{x+1}\left(2x^2 - 3x + 1\right) \leq 2$$

Megoldás:

Az értelmezés miatt fel kell tenni, hogy

$$2x^2 - 3x + 1 > 0,\ \ x + 1 > 0,\ \ x \neq 0.$$

Összegezve a kikötéseket a következőt kapjuk: $-1 < x < 0{,}5$ vagy $x > 1,$ és $x \neq 0$.

Ha $-1 < x < 0$, akkor $0 < x+1 < 1$ és így az eredeti egyenlőtlenség aloldalán álló függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$2x^2 - 3x + 1 \geq (x+1)^2 \text{ igaz, ahonnan } x(x-5) \geq 0.$$

A feltevés szerint $x < 0$, ezért $x - 5 \leq 0,\ x \leq 5$, így ez az egyenlőtlenség igaz minden $x \in \left]-1;0\right[$ valós számra.

Ha $0 < x < 0{,}5$, akkor már a függvény szigorúan monoton nő, így

$x(x-5) \leq 0$, de itt is $x - 5 < 0$, így az egyenlőtlenség igaz minden $x \in \left]0;0{,}5\right[$ valós számra.

Ha $x > 1$, akkor a függvény szigorúan monoton nő, ezért

$x(x-5) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 5$, összevetve a feltétellel a megoldás ekkor $x \in \left]1;5\right]$

16. $$log_x 3 \leq log_{2x+3} 9$$

Megoldás:

Tegyük fel, hogy $x > 0$ és $x \neq 1$. Áttérhetünk 3-as alapra, mert $2x + 3 > 3 \neq 1$, így a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{log_3 x} \leq \frac{2}{log_3(2x+3)}.$$

Ha $0 < x < 1$, akkor a baloldal negatív, a jobboldal pozitív, így $x \in \left]0;1\right[$ megoldás.

Ha $x > 1$, akkor mindkét nevező pozitív, ezért

$$log_3(2x+3) \leq 2\,log_3 x = log_3 x^2.$$

Mivel a $log_3 x$ függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$2x + 3 \leq x^2$$
$$x^2 - 2x - 4 \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ vagy } x \geq 3.$$

Az $x > 1$ feltétel miatt csak $x \geq 3$ a megoldás ebben az esetben.

Összefoglalva a megoldás: $x \in \left]0;1\right[\bigcup$.

17. $$log_{2-x} \frac{3-x}{4-x} \leq 1$$

Megoldás:

A logaritmus alapja nem lehet negatív, azaz $x - 2 > 0$, ezért $x < 2$. Ekkor viszont a tört pozitív, - mert a tört csak $x < 3$ vagy $x > 4$ esetén negatív – ezért a logaritmusa is létezik.

Ha $2 - x > 1$, azaz $x < 1$, akkor a logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

$0 < \dfrac{3-x}{4-x} \leq 2 - x$ következik. Mivel $x < 1$, ezért $4 - x > 0$, ezért

$$3 - x \leq (2-x)(4-x),$$
$$x^2 - 5x + 5 \geq 0.$$

Mivel $x < 1$, ezért $x^2 - 5x + 5 = x^2 + 5\underbrace{(\quad 1)}_{>0}\quad 0$ teljesül.

Ha viszont $0 < 2 - x < 1$ azaz $1 < x < 2$, akkor a logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$\frac{3-x}{4-x} \geq 2 - x$$

Az $x-$re tett kikötés miatt $4 - x > 0$, ezért

$$3 - x \geq (4-x)(2-x),$$

$x^2 - 5x + 5 \leq 0$. A baloldal dérushelyei: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$,

ezért az egyenlőtlenség megoldása: $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Figyelembe véve az $1 < x < 2$ kikötést, ebben az esetben a megoldás:

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} \leq x < 2.$$

Összegezve a feladat megoldása: $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left[\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}; 2\right[$.

18. $log_{x+2}\left(x^2 - 2x + p\right) \geq 2$

Megoldás:

Fel kell tenni, hogy $x + 2 > 0,\ x + 2 \neq 1,\ x^2 - 2x + p > 0.$

Mivel $x^2 - 2x + p = \underbrace{(\quad 1)^2}_{\geq 0}\quad (\quad -1)$, ezért a kikötések: $x > -2,\ x \neq -1,\ p > 1.$

Ha $x + 2 > 1$, azaz $x > -1$, akkor a logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

$x^2 - 2x + p \geq (x+2)^2$, ahonnan $x \leq \dfrac{p-4}{6}$.

Ha $p > -1$, akkor $-1 < x \leq \dfrac{p-4}{6}$.

Ha $0 < x + 2 < 1$, azaz $-2 < x < -1$, akkor a logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$x \geq \frac{p-4}{6}.$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy $-2 < \frac{p-4}{6} < -1$, akkor $-12 < p-4 < -6$, azaz

$-8 < p < -2$, ami ellentmond p>1- nek.

19. $$\frac{1}{log_5\left(3-2x\right)} - \frac{1}{4-log_5\left(3-2x\right)} < 0$$

Megoldás:

A logaritmus értelmezése miatt fel kell tenni, hogy $x < 1{,}5.$

Legyen $log_5\left(3-2x\right) = u \neq 0.$

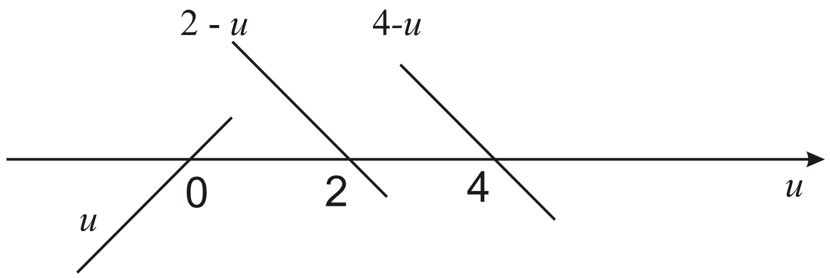
Ekkor egyenlőtlenségünk a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{4-u} < 0, \quad u \neq 4,$$

$$\frac{2-u}{u\left(4-u\right)} < 0.$$

Ábrázoljuk az $u,\ 2-u,\ 4-u$ függvényeket, mert ezek előjele dönti el a tört előjelét.

Nekünk azok az *u*-k a megoldások, ahol a negatív függvényértékek száma páratlan:



Az ábráról leolvasható, hogy $u \in \left]-\infty;0\right[\bigcup$.

Elvégezve a visszahelyettesítést:

$$log_5\left(3-2x\right) < 0 \text{ vagy } 2 < log_5\left(3-2x\right) < 4.$$

Mivel az $log_5 x$ függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$0 < 3-2x < 1 \quad \text{vagy} \quad 25 < 3-2x < 625 \text{ melyekből}$$

$$1{,}5 > x > 1 \quad \text{vagy} \quad -311 < x < -11.$$

Mindkét kapott eredmény megfelel a kikötésnek.

20. $$\frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{log_3(2,5-x)+log_3 2}\le 0$$

Megoldás:

Fel kell tenni, hogy $x<2,5$ $x\ne 2,$ és $2-x^2+2x\ge 0.$

Ezen kikötésekből következik, hogy $1-\sqrt{3}<x<2,5$ és $x\ne 2.$

$$\frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{log_3(5-2x)}\le 0$$

Ha $2<x<2,5$, akkor a számláló pozitív, a nevező negatív, így ekkor igaz az egyenlőtlenség.

Ha $1-\sqrt{3}<x<2$, akkor a nevező már pozitív és így a

$\sqrt{2-x^2+2x}+x-2\le 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

$\sqrt{2-x^2+2x}\le 2-x.$

Mindkét oldal nemnegatív, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$2-x^2+2x\le 4-4x+x^2,$

$x^2-3x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ vagy $x\ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Az x-re vonatkozó kikötés miatt $x\in\left[1-\sqrt{3};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right].$

Összefoglalva az egyenlőtlenség megoldása:

$$x\in\left[1-\sqrt{3};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\bigcup \qquad .$$

21. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenség-rendszert:

$$\left.\begin{array}{l} 3^{2x+y-1}+4\cdot 3^{2x-1}\le 2 \\ 4x+y\ge 2-log_3 4 \end{array}\right\}$$

Megoldás:

A második egyenlőtlenségből következik, hogy $2x+y-1\ge 1-2x-log_3 4$, ezért az első egyenlőtlenségbe helyettesítve a következőt kapjuk:

$$3^{1-2x-log_3 4}+4\cdot 3^{2x-1}\le 2,$$

$$\frac{3^{1-2x}}{4}+4\cdot 3^{2x-1}\le 2,$$

$$\frac{1}{3^{2x-1}}+16\cdot 3^{2x-1}\le 8.$$

$$16\cdot\left(3^{2x-1}\right)^2-8\cdot 3^{2x-1}+1\le 0,$$
$$\left(4\cdot 3^{2x-1}-1\right)^2\le 0.$$

Utóbbi viszont csak az egyenlőség esetén lehet igaz:

$$4\cdot 3^{2x-1}-1=0,$$
$$3^{2x-1}=\frac{1}{4}\quad\Leftrightarrow\quad 2x-1=log_3\frac{1}{4}\quad\Leftrightarrow\quad x=1-log_3 4.$$

Visszahelyettesítés után a második egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$2-2\,log_3 4+y\ge 2-log_3 4,$$
$$y\ge log_3 4.$$

22. Határozzuk meg mindazon $(x;y)$ valós számpárokat, amelyek kielégítik az alábbi egyenlőtlenség-rendszert:

$$\left.\begin{array}{l} log_{2-x}(2-y)>0 \\ log_{4-y}(2x-2)>0 \end{array}\right\}$$

Megoldás:

A logaritmus fogalma miatt x-re az alábbiakat kell kikötnünk:

$2-x>0,\ 2x-2>0,\ x\ne 1$, azaz $x\in\left]1;2\right[$.

A logaritmus fogalma miatt y-ra pedig az alábbiakat:

$4-y>0,\ 2-y>0,\ y\ne 3$, melyből $y<2$ adódik.

A második egyenlőtlenségben az alap 1-nél nagyobb, ezért $2x-2>1$, vagyis $x\ge 1{,}5$, amit a korábbi eredménnyel összevetve $x\in\left]1{,}5;2\right[$ adódik.

Így viszont az első egyenlőtlenségben a logaritmus alapja 1-nél kisebb, ezért belőle $2-y<1$, azaz y>1 következik és így már $y\in\left]1;2\right[$.

Összefoglalva mondhatjuk, hogy mindazon $(x;y)$ értékpárok megfelelnek, amelyekre

$$x\in\left]1{,}5;2\right[,\ y\in\left]1;2\right[.$$

23. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenség-rendszert:

$$\left.\begin{array}{l} log_{x-1}(5-y)<0 \\ log_{2-y}(4-x)<0 \end{array}\right\}$$

Megoldás:

x-re a logaritmus értelmezése miatt fel kell tennünk, hogy

$$x-1>0,\ x\ne 2,\ 4-x>0.$$

Az x lehetséges értékeinek az $]1;4[\setminus\{2\}$ halmaz felel meg.

y-ra: $2-y>0,\ y\neq 1,$ vagyis $y<2$ és $y\neq 1.$

Ha most $0<x-1<1$, akkor az első egyenlőtlenségből

$$5-y>1 \Leftrightarrow y<4.$$

Ha $x-1>1$, akkor $5-y<1$, ahonnan $y>4$, ami viszont $y<2$ miatt lehetetlen.

Így x-re csak $1<x<2$ jöhet számításba.

Ebből következik a második egyenlőtlenség alapján, hogy

$0<2-y<1$ lehetséges.

Ekkor viszont $4-x>1$ ahonnan $x<3$ adódik.

Az egyenlőtlenségrendszer megoldásai:

$$x\in\,]1;2[\quad y\in\,]1;2[\ .$$

24. Oldjuk meg az egyenlőtlenség-rendszert:

$$\left.\begin{array}{l} 2^{\left|x^2-2x-3\right|-log_2 3}=3^{-y-4} \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\leq 0 \end{array}\right\}$$

Megoldás:

Az első egyenletet átalakítjuk figyelembe véve, hogy $2^{log_2 3}=3$:

$$\frac{2^{\left|x^2-2x-3\right|}}{3}=3^{-y-4},\quad 2^{\left|x^2-2x-3\right|}=3^{-y-3}.$$

Mivel a 2^x és 3^x függvények grafikonjának csak egy közös pontja van a $(0;1)$, ezért csak $x^2-3-2x=0$ és $-y-3=0$ lehet, ahonnan $x_1=3,\ x_2=-1,\ y=-3$.

az $y=-3$-ra az egyenlőtlenség teljesül, ugyanis az egyenlőség igaz.

Így a megoldáshalmaz:

$$\{(-1;-3);(3;-3)\}.$$

25. Mindazon $(x;y)$ számpárok közül, amelyek a

$$log_{x^2+y^2}(x+y)\geq 1$$

egyenlőtlenséget kielégítik, keressük meg azt, amelyre az y a legnagyobb.

Megoldás:

Az $log_{x^2+y^2}(x+y)\geq 1$ egyenlőtlenség két esetben lehet igaz:

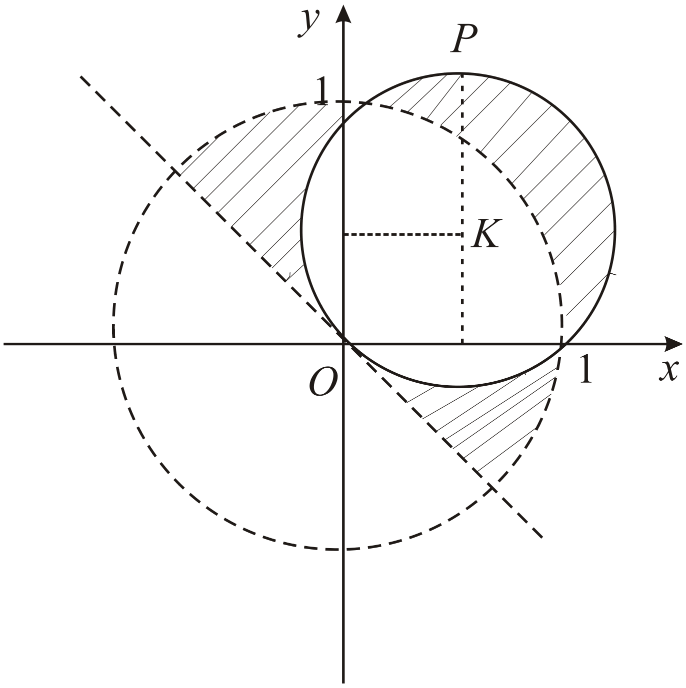
I. $x^2+y^2>1$ és $x+y\geq x^2+y^2$;

II. $0<x^2+y^2<1$ és $x+y\leq x^2+y^2$.

Könnyen tekinthető grafikus megoldás, ha tekintjük az

$$x^2+y^2=1;\ x+y=0;\ x^2+y^2=x+y$$

egyenletekkel adott alakzatokat. Az egyenlőtlenségek miatt az első két alakzatot szaggatott vonallal rajzoltuk.



A megoldáshalmazt a bevonalkázott tartomány szemlélteti, ahol az összefüggő vonallal rajzolt határpontok is beletartoznak. A K pontkoordinátái: $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, legyen a P pont $P\left(\frac{1}{2};y\right)$. Az y nyilván akkor maximális, ha $x=\frac{1}{2}$, ugyanis ez jelöli ki a kisebbik körön a legmagasabban fekvő P pontot.

$x^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+y$, ahonnan

$y^2-y-\frac{1}{4}=0,$

$y=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2},$

$y_{max}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$

A feladatsort összeállította: dr. Tóber Ernő Nagykanizsán, 1990. december 5-én.