Válogatott feladatok az elemi matematikából

Összeállította: dr. Tóber Ernő, Nagykanizsa, 1980.

Logikai és kombinatorikai feladatok

1. Egy személyvonat déli 12 órakor indul A-ból B-be 60 km/h állandó sebességgel. Eközben ugyanezen a pályán B-ből A felé halad egy tehervonat 40 km/h sebességgel. Mindkét vonat egyszerre ér célba, és ekkor háromszor olyan távol vannak egymástól, mint egy órával találkozásuk előtt. Mikor indul el a tehervonat B-ből?

2. Egy 180 cm magas, vízszintes alapú henger alakú benzintartály alul csappal, felül pedig töltőnyílással van ellátva. Ez utóbbin át 1 óra alatt tölthető meg az üres tartály. Ha a töltőnyílást és a csapot egyszerre tartjuk nyitva 5 percen át, akkor a tartályban 10 cm-t emelkedik a benzin szintje. Mennyi idő alatt lehet a színültig tele tartályt a csapon át kiüríteni?

3. Egy iskolai rendezvényen körülbelül 80 tanuló vett részt. A résztvevők egyharmada leány. A leányok fele 12. osztályos, a fiúk ötheted része viszont nem 12. osztályos. Hány 12. osztályos tanuló volt a versenyen?

4. Egy telephelyen tyúkokat, libákat és házi nyulakat nevelnek. A libák és nyulak számának aránya 5:9; a nyulak és tyúkok számának aránya 3:2. Az állatoknak 152-vel több lába van, mint feje. Hány tyúkot, libát és nyulat nevelnek a telephelyen?

5. Egy katona elindult a városból és naponta 12 km-t haladt. Egy másik katona is elindult ugyanakkor, de ő az első napon 1 km-t, a másodikon 2 km-t, a harmadikon 3 km-t, a negyediken 4 km-t, az ötödiken 5 km-t és így tovább, minden nap 1 km-rel többet tett meg, amíg csak utol nem érte az első katonát. Hány nap múlva érte utol a második az elsőt?

6. Amikor a 2000 méteres futóverseny győztese átszakítja a célszalagot, Marika 200 méterrel, Erzsi 290 méterrel van mögötte. Tegyük

fel, hogy mindkét leány eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább. Amikor Marika célba ér, hány méterrel lesz mögötte Erzsi?

7. Hét kiránduló összesen 100 gombát szedett az erdőben. Nem volt közöttük két olyan, akik ugyanannyit gyűjtöttek. Bizonyítsuk be, hogy van három olyan kiránduló, akik legalább 50 gombát gyűjtöttek összesen.

8. Az 1 és 10000 között az 1-est számjegyként tartalmazó, avagy nem tartalmazó szám van több?

9. Egytől 100-ig a természetes számokból minden lehetséges módon párokat képezünk, ügyelve arra, hogy a párba sorolt két szám különböző legyen. Az egy párba sorolt számokat szorozzuk össze. Hány olyan szorzat lesz, amely 3-mal osztható?

10. Tekintsünk a síkon 9 pontból álló négyzetrácsot. Kiválasztunk egy pontot a kilenc közül. Hányféle módon választhatunk további kettőt a maradék közül, hogy a 3 pont egy háromszöget határozzon meg?

11. Tekintsünk a síkon 7 pontot. Ezeket 7 szakasszal összekötjük oly módon, hogy zárt törött vonalat kapjunk. Mennyi lehet a töröttvonal önmagával képzett metszéspontjainak maximális száma?

Algebrai – és trigonometriai átalakítások alkalmazásai

12. Legyen $x + y + z = 1$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2$ kifejezés értékét.

13. Legyen n tetszőleges egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)+1$$

kifejezés teljes négyzet.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $x + y + z + t = 0$, akkor

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3\,(xy - zt)\,(z + t)$$

.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y, z, t egész számokra $x + y = z + t$, akkor

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

három egész szám négyzetének összege.

16. Legyen $x + y + z = 0$ és $x^2 + y^2 + z^2 = a$. Számítsa ki az

$$x^4 + y^4 + z^4$$

kifejezés értékét.

17. Számítsuk ki a következő kifejezés számértékét:

$$\frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b},$$

ha $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ és $9a^2 - b^2 \neq 0$.

18. Számítsa ki az

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$$

kifejezés értékét, ha

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = a.$$

19. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} = 1,$$

akkor

$$\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{a + c} + \frac{c^2}{a + b} = 0.$$

20. Hozzuk minél egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sin^2 2\alpha$$

21. Számítsa ki a

$$\sin^6 x+\cos^6 x$$

értékét, ha $\sin 2x = 0,2$.

22. Hozzuk minél egyszerűbb alakra következő kifejezést:

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$$

.

23. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\cos 15^0+\sin 15^0}{\cos 15^0-\sin 15^0}=\sqrt{3}.$$

24. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögeire

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\beta+\cos\beta,$$

akkor a háromszög egyenlő szárú, vag derékszögű.

25. Egy háromszög α, β, γ szögeire $2\beta=\alpha+\gamma$ és $\cos^2\beta=\sin\alpha\sin\gamma$. Határozzuk meg a háromszög szögeit.

26. Az r sugarú kör egymásra merőleges átmérői AE és BF. Legyen C az EF körív belső pontja. BC az AE – t Q – ban, az AC a BF – et P – ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $APQB$ négyszög területe r^2.

27. Az ABC háromszög A – ból induló súlyvonala az A – nál lévő szöget 15^0 – os és 30^0 – os részekre osztja. Mekkorák a háromszög hiányzó szögei?

Elemi számelmélet

28. A 16958 és 62280 számokat egy természetes számmal osztva maradékul 32 – t, illetve 1 – et kapunk. Mi lehetett az osztó?

29. Bizonyítsa be, hogy

$$17^5 + 24^4 - 13^{21}$$

kifejezés osztható 10 – zel.

30. Határozzuk meg a következő kifejezés utolsó számjegyét:

$$19^{87} - 87^{19}$$

31. Milyen maradékot kapunk, ha 66^{17} – ent elosztjuk 7 – tel?

32. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^{16} + 30^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^7$$

kifejezés osztható 10 – zel.

33. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^{17} + 2^5 - 1$$

összetett szám.

34. Bizonyítsuk be, hogy

$$3^{60} - 2^{60}$$

osztható 11 – gyel.

35. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$A = 2 + 3^n + 2^{n+1} + 6^n$$

összetett szám.

36. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor

$$25n^4 + 9n^2 + 1$$

mindig összetett szám.

37. Határozzuk meg azokat a $3n + 1$ alakú természetes számokat, amelyek oszthatók 5 – tel.

38. Bizonyítsuk be, hogy ha p 3 – nál nagyobb prímszám, akkor tetszőleges n természetes számra

$$A = p^2 + 3n + 2$$

összetett szám.

39. Bizonyítsuk be, hogy ha x 3 – al nem osztható természetes szám, akkor

$$A = 1 + 2^x + 4^x$$

osztható 6- tal.

40. Bizonyítsuk be, hogy ha n 3 – al nem osztható természetes szám, akkor

$$A = 1 + n^2 + 3^n + n^4$$

osztható 6 – tal.

41. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$n^5 - 5n^3 - 6n$$

osztható 10 – zel.

42. Legyenek a és b egész számok. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A = 5a + 3b \text{ és } B = 13a + 8b$$

számok legnagyobb közös osztója megegyezik a és b legnagyobb közös osztójával.

43. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$\frac{n^2+3n+3}{n+1}$$

tört nem egyszerűsíthető.

44. Bizonyítsuk be, hogy bármely n egész számra

$$n^2+3n+5$$

nem osztható 121 – gyel.

45. Bizonyítsuk be, hogy

$$\underbrace{221\cdots 22}_{n}+\underbrace{33\cdots 3}_{n}{}^{2}=\underbrace{11\cdots 1}_{2n}$$

46. A 14641 egy természetes szám negyedik hatványa. Bizonyítsuk be, hogy ha a számjegyek közé mindenhova ugyanannyi nullát beírunk, akkor ismét olyan számot kapunk, amely egy természetes szám negyedik hatványa.

47. Bizonyítandó, hogy

$$\underbrace{111\cdots 1}_{n}\cdot\underbrace{100\cdot 005}_{n+1}+1$$

egy természetes szám négyzete.

Másodfokúra visszavezethető egyenletek; a gyökökkel kapcsolatos feladtok

48. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

49. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{49}{x-50} + \frac{50}{x-49}$$

50. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$$

51. Legyenek $p; p_1; q; q_1$ olyan valós számok, amelyekre $p \cdot p_1 = 2\left(q + q_1\right)$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + px_1 + q = 0 \text{ és } x^2 + p_1 x + q_1 = 0$$

egyenletek közül legalább az egyik megoldható a valós számok halmazán.

52. Az $x^2 + ax + 1 = b$ egyenlet gyökei pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2$ összetett szám.

53. Határozzuk meg az

$$x^2 y - x^2 + 2xy - x + 2y = 1$$

egyenlet azon $(x; y)$ megoldását, amelyekre y maximális.

54. Határozzuk meg mindazon valós értékeket, amelyekre az alábbi egyenletnek két különböző pozitív gyöke van:

$$x^2 - 2\left(a - 2\right)x + a^2 - 2a - 3 = 0.$$

55. A p paraméter mely értékeire lesz az

$$x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5 = 0$$

egyenlet mindkét gyöke negatív?

56. Az a paraméter mely értékeire lesz a

$$(2a+1)x^2 - ax + a - 2 = 0$$

egyenletnek két olyan valós gyöke, melyek közül az egyik kisebb, a másik nagyobb $1-$nél?

57. Milyen $p-$re lesz a

$$(p-2)x^2 - 2px + p - 1 = 0$$

egyenlet mindkét gyöke pozitív?

58. Az x, y, z valós számok eleget tesznek az

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$$

egyenletnek. Mekkora lehet a $2x + y - z$ kifejezés legnagyobb értéke?

59. Határozzuk meg a legkisebb x értéket, amelyre léteznek olyan y és z számok, melyek eleget tesznek az alábbi egyenletnek:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Egyenletrendszerek

60. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}(x+y)(x+y+z)&=18,\\(y+z)(x+y+z)&=30,\\(z+x)(x+y+z)&=24.\end{aligned}\right\}$$

61. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}2x^2+2yz-4x+1&=0,\\2y^2+2xz-4y+1&=0,\\2z^2+2xy-4z+1&=0.\end{aligned}\right\}$$

62. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}x^3+\ \ y^3&=19,\\yx^2-xy^2&=6.\end{aligned}\right\}$$

63. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}x^2-y^2&=3,\\x^2+xy+y^2&=7.\end{aligned}\right\}$$

64. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}x^3-y^2+x-1&=0,\\y^3-x^2+y-1&=0.\end{aligned}\right\}$$

65. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=3,\\xy+xz+yz&=3.\end{aligned}\right\}$$

66. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} xy+x+y&=3,\\ yz+y+z&=8,\\ zx+z+x&=15. \end{aligned}\right\}$$

67. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4&=133,\\ x^2-xy+y^2&=7. \end{aligned}\right\}$$

68. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=2,\\ x^2+xy+y^2-y&=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek nincs valós megoldása.

69. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6,\\ x^2+y^2+z^2&=14,\\ x^3+y^3+z^3&=36. \end{aligned}\right\}$$

Irracionális egyenletek

Az alábbi feladatok mindegyikében a megoldásokat a valós számok halmazán keressük.

70. $$\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\sqrt{3}$$

71. $$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$$

72. $$\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$$

73. $\sqrt{17-x^2}=(3-\sqrt{x})^2$

74. $\sqrt{x}-1=\dfrac{2x+4}{x-4}$

75. $\sqrt{7x^2+8x+10}-\sqrt{7x^2-8x+10}=2x$

76. $\sqrt{x^2-\sqrt{x^7}}+\sqrt{x-\sqrt{x^7}}=x$

77. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12\,(x-1)}$

78. $\sqrt[3]{2x-7}+\sqrt[3]{3x-3}=\sqrt[3]{x-8}+\sqrt[3]{4x-3}$

Trigonometrikus egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

79. $(1+\cos x)\,\mathrm{tg}x=\sin 2x$

80. $(\sin 2x-\cos 2x)^2+\sin 6x=1$

81. $3\sin^3 x+\cos^3 x=2\sin x+\cos x$

82. $\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$

83. $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$

84. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$

85. $$\cos 3x - \sin 6x + \sin 2x - \cos 7x = 0$$

86. $$\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0,5$$

87. $$\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$$

88. $$\sqrt{3} (\cos x - \sin 3x) = \cos 3x - \sin 3x$$

89. $$\sin 3x \cos 3x = \sin 2x$$

90. $$2 \sin 11x + \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = 0$$

91. $$\sin^4 x + \sin^4 2x + \sin^4 3x = \cos^4 x + \cos^4 2x + \cos^4 3x$$

Egyenlőtlenségek

92. Az ABC háromszög oldalai a, b, c, amelyekre $a + b + c = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$$

93. Legyenek a és b valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$2 \left(a^4 + b^4 \right) \geq (a + b) \left(a^3 + b^3 \right)$$

94. Bizonyítsuk be, hogy a, b, c tetszőleges valós számokra

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc\,(a + b + c)$$

95. A háromszög oldalai: a, b, c; kerülete: $2s = a + b + c$.
Bizonyítsa be, hogy

$$(s - a)\,(s - b)\,(s - c) \leq \frac{abc}{8}$$

96. Bizonyítsa be, hogy

$$\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} \leq 5,$$

ha $a + b + c = 1$ és a gyökök értelmezve vannak.

97. Bizonyítsa be, hogy ha

$$\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + y} = 2\sqrt{1 + a},$$

akkor $x + y \geq 2a$.

98. Ismeretes hogy $a^5 - a^3 + a = 2$.
Bizonyítsuk be, hogy $\quad 3 < a^6 < 4$.

99. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 2$ és természetes szám, akkor

$$\sqrt[n]{(n!)^3} \leq \frac{n\,(n + 1)^2}{4}$$

100. Bizonyítsuk be, hogy

$$\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc \leq 9,$$

ha $a, b, c \in |0;1|$