8. Adott az $f(x)=x^2+ax+b$ másodfokú polinom, amelyről tudjuk, hogy az $f\left(f(x)\right)=0$ egyenletnek négy különböző valós megoldása van, melyek közül pontosan kettőre igaz, hogy összegük -1. Mutassuk meg, hogy $b<-\frac{1}{4}$.

Megoldás:

Jelölje x_1 és x_2 az $f\left(f(x)\right)$ polinom azon két valós gyökét, melyek összege -1, és legyen $f(x_1)=c_1, f(x_2)=c_2$. Az nem lehet, hogy $c_1=c_2$, mivel akkor $f\left(f(x)\right)$ másik két gyökének összege is -1 lenne. (Gondoljunk arra, hogy f grafikonja parabola, ami tengelyesen szimmetrikus. Mivel $x_1 \neq x_2$, ezért a szimmetriatengely egyenlete $x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{2}$.) Ekkor $f(c_1)=0, f(c_2)=0.$
Mivel

$$x_1^2+ax_1+b=c_1,$$
$$x_2^2+ax_2+b=c_2,$$

így

$$x_1^2+x_2^2+a\left(x_1+x_2\right)+2b=c_1+c_2.$$

A c_1 és c_2 megoldásai az $f(x)=0$ egyenletnek, ezért a Viéte-formulák szerint $c_1+c_2=-a.$
Behelyettesítve:

$$x_1^2+x_2^2+2b=0 \Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

Tekintettel arra, hogy

$$2\left(x_1^2+x_2^2\right) \geq \left(x_1+x_2\right)^2 \Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)^2 \geq 0,$$

adódik, hogy

$$b<-\frac{1}{4}\left(x_1+x_2\right)^2=-\frac{1}{4},$$

ami éppen a feladat állítása.