Megyei matematikaverseny

11. osztályosok versenye

2016. november 8.

1. ***a)*** Az a és b számokra $\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=2$ teljesül. Milyen értékeket vehet fel a $\frac{3a-b}{a+5b}$ kifejezés?

b) Az a és b valós számokra $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(a+1)}=\frac{1}{(a+1)(b+1)}$ teljesül. Mennyi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ értéke?

(***12 pont***)

2. Melyek azok az $\overline{ABC}$ háromjegyű számok, melyre $\overline{ABC}=2\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\right)$ teljesül, ahol A, B, C nullától és egymástól is különböző számjegyek? (***13 pont***)

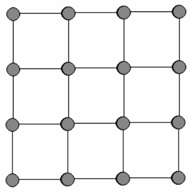
3. Oldja meg az $\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\geq 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$ egyenlőtlenséget a valós számok körében. (***15 pont***)

4. Egy húrtrapéz párhuzamos alapjainak hossza 20 és 12 egység, és a trapéz körülírt körének középpontja illeszkedik a hosszabbik alapra. Milyen hosszú a trapéz szára, átlója és magassága? (***12 pont***)

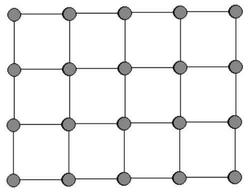
5. Az $x^2+px+q=0$ egyenlet gyökei negatív egész számok. Ha $p+q=2017$, akkor mennyi q értéke? (***14 pont***)

6. Az ábra szerint a négyzetrácson kijelöltünk ***a)*** 4×4; ***b)*** 4×5 rácspontot.

a)

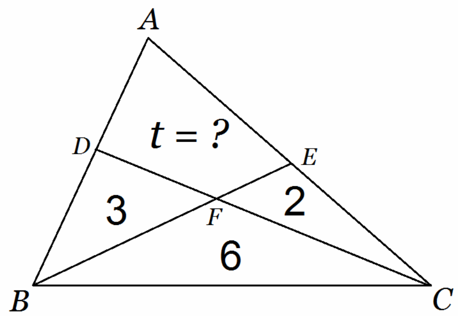


b)



Legfeljebb hány rácspontot választhatunk közülük úgy, hogy a kiválasztottak között ne legyen négy olyan, melyek egy a rácsegyenesekkel párhuzamos oldalú téglalap csúcsai? (***14 pont***)

7. Az ABC háromszög AB és AC oldalának egy-egy pontja D és E, a BE és CD szakaszok metszéspontja F. Az ábra szerint a háromszöget ez a két szakasz négy részre vágja.



A négy részből háromnak ismerjük a területét: $t_{BFD}=3$, $t_{BCF}=6$, $t_{CEF}=2$. Mekkora az $ADFE$ négyszög területe? (***20 pont***)

Megyei matematikaverseny
12. osztályosok versenye
2016. november 8.

1. Jelölje az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat valamilyen sorrendben *a, b, c, d, e, f.* Tudjuk, hogy $a+b<c+d$ és $c+e<a<f$. Határozza meg az *a, b, c, d, e, f* betűk számértékét. (***12 pont***)

2. Oldja meg az $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(\log_{x-1} 9\right)\right)>0$ egyenlőtlenséget. (***11 pont***)

3. ***a)*** Az $a_1, a_2, \ldots$ számtani sorozat első hét tagjának összege 7, és $a_3+a_6+a_7=7$. Mennyi a_{2016} értéke? (***5 pont***)

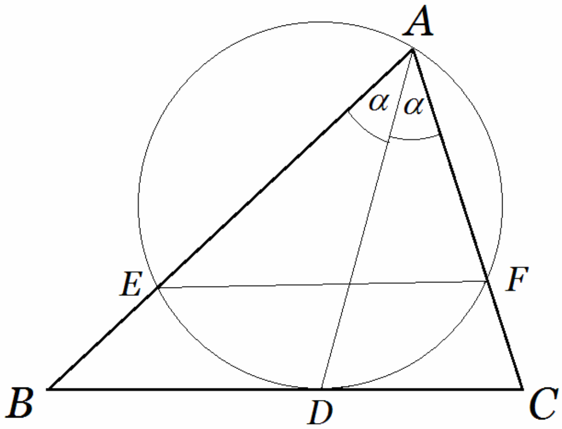
b) A b_1, b_2, b_3 pozitív számok növekvő számtani sorozatot alkotnak, míg az $b_1 \cdot b_2$, $b_2 \cdot b_3$ és $b_1 \cdot b_3$ számok egy mértani sorozat egymást követő elemei. Mekkora a mértani sorozat hányadosa? (***8 pont***)

4. Az *ABC* háromszög derékszögű és a derékszög a $C(1;\,1)$ csúcsnál van. Az *A* csúcsból induló belső szögfelező a *BC* befogót az $F(4;\,4)$ pontban metszi. Számítsa ki az *A* csúcs koordinátáit, ha a *B* csúcs koordinátái $(9;\,9)$. (***13 pont***)

5. Az *ABC* háromszög *C* csúcsából induló súlyvonalának egyenese a szemközti oldalt a *D* pontban, a háromszög köré írt körét az *E* pontban metszi. Mekkora a *CD* súlyvonal, ha $AC=7$, $BC=9$ és $CE=13$? (***16 pont***)

6. Oldja meg az $a-2<(a-1)\sqrt{x+1}$ egyenlőtlenséget a valós számok körében, ahol az *a* paraméter tetszőleges valós szám lehet. (***15 pont***)

7. Az *ABC* háromszög oldalainak hossza: $AB=9$, $BC=8$, $AC=7$; *AD* szögfelező. Az *A* csúcson átmenő kör a *BC* oldalt a *D* pontban érinti, és ez a kör az *AB* és *AC* oldalakat az *E* és *F* pontban metszi.



a) Mutassa meg, hogy $EF \parallel BC$.

b) Mekkora az *EF* szakasz? (***20 pont***)