Versenyfeladatok

(9. osztály)

1. Gergő vásárolt 4 süteményt és 3 banánt, így a pénztárnál feleannyit fizetett, mint Benő, aki 2 süteményt és 16 banánt vásárolt. Hányszor drágább egy sütemény egy banánnál?
(10 pont)

2. Egy szimmetrikus trapéz átlója 25 cm, magassága 15 cm. Mekkora a területe?
(12 pont)

3. Kovács úr a reptérre kocsival ment ki. Az első óra elteltével, 80 km vezetés után észrevette, hogyha nem változtat a sebességén, akkor a tervezetthez képest 15 percet késni fog. Így aztán 40 km/h-val gyorsabban tette meg a hátralevő utat és 12 perccel korábban érkezett a tervezett időponthoz képest. Hány kilométerre van a reptér Kovács úr otthonától?
(14 pont)

4. Az *ABC* háromszög *A*-nál levő szöge tompaszög. Legyen *D* az *AB*, *E* pedig az *AC* oldal tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy
$$CD + BE > BD + DE + EC$$
(14 pont)

5. Melyek azok az a, b, c prímszámok, melyekre teljesül az
$$abc = 5(a + b + c)$$
egyenlőség?
(16 pont)

6. Igazoljuk, ha x, y pozitív valós számokra teljesül, hogy
$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{5}$$
akkor
$$\left|\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right| = 1$$
(16 pont)

7. A *Görbelábú SC* futballcsapata szabadrúgáshoz jutott. Az ellenfél kapusa azt kérte a játékosoktól, hogy 7 fős sorfalat állítsanak úgy, hogy két magasabb játékos között ne álljon kisebb. Hányféleképpen tudja a sorfalat a hét játékos létrehozni, ha nincs közöttük két azonos magasságú?
(18 pont)

(10. osztály)

1. Egy medencét két nagy és egy kis csövön keresztül 4 óra alatt tudunk feltölteni. Ha erre a célra egy nagy és három kis csövet használunk, akkor is 4 óra lesz a feltöltési idő. Mennyi idő alatt tölthetnénk fel ezt a medencét négy nagy és négy kis csövön keresztül?
(10 pont)

2. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1$$
egyenletet!
(12 pont)

3. Egy lineáris függvény áthalad a $P(2;4)$ ponton és a koordináta-tengelyek pozitív felével 16 egységnyi területű háromszöget zár be. Mely pontban metszi a függvény grafikonja az x-tengelyt?
(12 pont)

4. Képezzük az $a_n=\frac{n!\cdot(n+1)!}{2}$ számokból álló sorozatot, ahol az n 100-nál kisebb pozitív egész szám. Ezek közül a számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mia a valószínűsége, hogy ez a kiválasztott szám négyzetszám lesz? $(n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n)$
(14 pont)

5. Az $ABCD$ paralelogrammában O olyan belső pont melyre az $AOB\measuredangle + COD\measuredangle = 180°$. Igazoljuk, hogy ekkor $OBC\measuredangle = ODC\measuredangle$!
(16 pont)

6. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, melynek számjegyei mind különbözők és nincs benne olyan számjegy, mely két nagyobb számjegy között helyezkedik el?
(18 pont)

7. Egy * műveletet a pozitív valós számokra a következőképpen értelmezünk:
$$m*n=\frac{mn+1}{m+n}$$
   a. Igaz-e, hogy egy $a*b*c$ művelet során az a, b, c számok tetszőleges sorrendje esetén ugyanazt az eredményt kapjuk?
   b. Mivel egyenlő
$$2016*2015*2014*\ldots*2*1*0=?$$
   (A * műveleteket balról jobbra hajtjuk végre!)
(18 pont)