Javítási útmutató
11. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. a) Mennyi a $4b(5a-b)-(5a-2)(5a+2)$ kifejezés legnagyobb lehetséges értéke, ahol a és b tetszőleges valós számok? ***(6 pont)***

Megoldás. $4b(5a-b)-(5a-2)(5a+2)=20ab-4b^2-25a^2+4=4-\left(25a^2-20ab+4b^2\right)=$ $=4-(5a-2b)^2$, tehát a kifejezés értéke 4-nél nem nagyobb. ***4 pont***

A kifejezés értéke lehet 4, ha például $a=b=0$. ***1 pont***

A kifejezés legnagyobb értéke 4. ***1 pont***

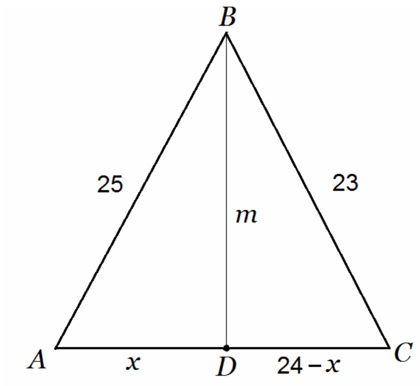
1. b) Az *x, y, z* számokra $x(x+1)=y(y+1)=z(z+1)$ teljesül. Igazolja, hogy $(x-y)(y-z)(z-x)=0$. ***(6 pont)***

1. megoldás. Az első egyenlőség szerint $x^2+x-y^2-y=0$, azaz $(x-y)(x+y+1)=0$.
Hasonlóan kapjuk, hogy $(x-z)(x+z+1)=0$. ***1+1=2 pont***
Ha $x-y=0$, vagy $z-x=0$, akkor $(x-y)(y-z)(z-x)=0$. ***2 pont***
Különben $x+y+1=0$ és $x+z+1=0$. Ezekből $y=z$ adódik, és ekkor is $(x-y)(y-z)(z-x)=0$. ***2 pont***

2. megoldás. Legyen $x(x+1)=y(y+1)=z(z+1)=c$. Ekkor *x, y, z* mindegyike gyöke a $t(t+1)=c$ másodfokú egyenletnek, melynek legfeljebb két gyöke van, ezért az *x, y, z* számok között van két egyenlő. ***6 pont***

2. Az ABC háromszög oldalai $AB = 25$, $AC = 24$, $BC = 23$, a B csúcsból induló magasság talppontja az AC oldalon D. Mekkora az $AD - DC$ különbség? ***(12 pont)***

Megoldás. $m^2 = 25^2 - x^2 = 23^2 - (24 - x)^2$.



Egy ábrára, a két Pitagorasz-tételre adjunk ***1+2+2=5 pontot.***

$25^2 - 23^2 = x^2 - (24 - x)^2$, így $(25 - 23)(25 + 23) = (x - (24 - x))(x + (24 - x))$.
Tehát $2 \cdot 48 = (2x - 24) \cdot 24$, $2 = x - 12$, $x = 14$.

Az egyenletrendszer megoldására adjunk ***5 pontot.***
(A magasság hosszát nem szükséges kiszámolni.)

$AD = 14$, $DC = 10$, $AD - DC = 14 - 10 = 4$.

Helyes válaszra adjunk ***2 pontot***.

3. Oldja meg az $\left(a + \frac{6}{b}\right)\left(b + \frac{6}{a}\right) = 25$ egyenletet a pozitív egész számok körében. ***(12 pont)***

Megoldás. $\left(a + \frac{6}{b}\right)\left(b + \frac{6}{a}\right) = 25$, $ab + 12 + \frac{36}{ab} = 25$, azaz $(ab)^2 - 13ab + 36 = 0$. ***4 pont***

Szorzattá alakítással $(ab - 4)(ab - 9) = 0$, így az egyenlet megoldásai: $ab = 4$ és $ab = 9$.
4 pont

Ezért a keresett (a, b) megoldások az osztópárok alapján: $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 9)$, $(9, 1)$, $(3, 3)$.

Ha 1 megoldást talál, arra adjunk ***1 pontot***, 2 vagy 3 megoldásra ***2 pontot***, 4 vagy 5 megoldásra ***3 pontot***. A 6 megoldás felsorolására adjunk ***4 pontot***.

4. Hány olyan páros szám van 4000 és 7000 között, amelynek számjegyei különbözőek?

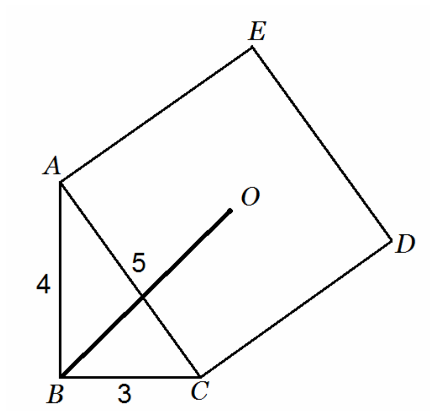
(12 pont)

Megoldás. Ha az első számjegy páros, az kétféle lehet, és ekkor az utolsó számjegyre 4-féle lehetőség van, a második jegy 8-féle, a harmadik 7-féle lehet. Ez összesen $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 448$ lehetőség. ***4 pont***

Ha az első számjegy páratlan, akkor az csak 5, az utolsó számjegyre 5-féle lehetőség van, a második jegy 8-féle, a harmadik 7-féle lehet. Ezeknek a lehetőségeknek a száma $5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$. ***4 pont***

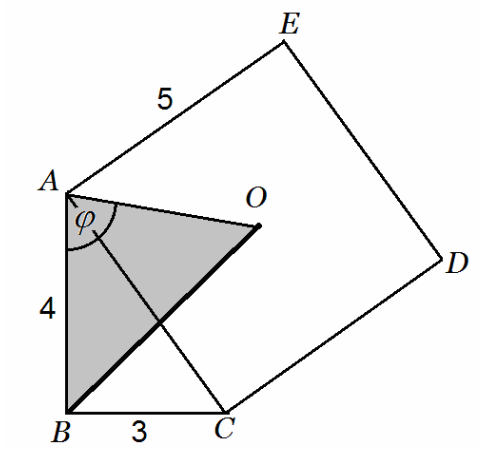
A keresett számok száma $488 + 280 = 728$. (A 4000 és a 7000 nincs a keresett számok között, mert vannak egyforma számjegyei.) ***4 pont***

5. Az *ABC* derékszögű háromszög oldalhosszai 3, 4 és 5 egység. Az *AC* átfogóra kifelé rajzolt négyzet középpontja *O*.



Mekkora a *BO* szakasz? ***(16 pont)***

1. megoldás. A $BAC\angle$ és a $CAO\angle = 45°$ szögek összege $BAO\angle = \varphi$.



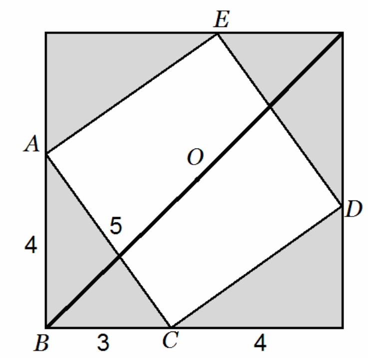
Ennek koszinuszát addíciós tétellel számolhatjuk, ahonnan már koszinusztétellel azonnal kapjuk *BO*-t.

$\cos\varphi = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Most a *BO*-ra felírt koszinusztételből:

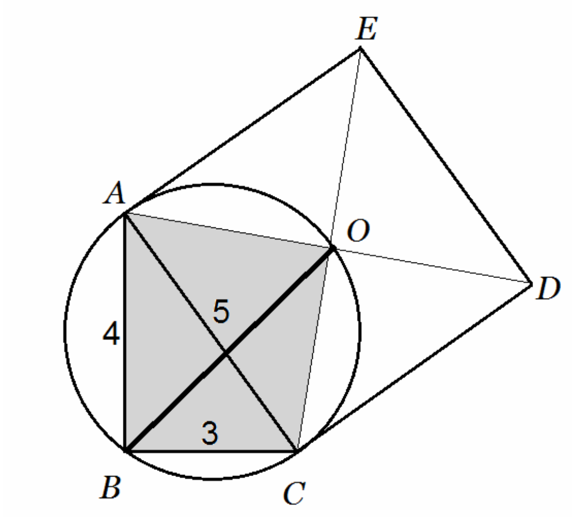
$BO^2 = 4^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 16 + \frac{25}{2} - 4 = \frac{49}{2}$, vagyis $BO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

2. megoldás. Az *ACDE* négyzet oldalaira az ábra szerint építsünk az *ABC* derékszögű háromszöggel egybevágó háromszögeket.



Így kaptunk egy négyzetet, melynek oldala $3+4=7$, az átlója $7\sqrt{2}$, és az átló fele $BO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

3. megoldás. Az *ABCO* négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szöge, a *B* és *O* csúcsoknál lévő szögek derékszögek.



Írjuk fel a Ptolemaiosz-tételt: $AB\cdot CD + BC\cdot AO = BO\cdot AC$. Mivel $AO = OC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, így $4\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2} + 3\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\cdot BO$. Innen $BO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Pontozás: Ha rátalál egy a megoldáshoz elvezető útra, arra adjunk legalább ***4 pontot***.
Teljes megoldásra ***16 pontot.***

6. Melyik az az $\overline{abc}$ háromjegyű szám, amelyre legkisebb az $\overline{abc}-\left(a^2+b^2+c^2\right)$? Mekkora ez a legkisebb érték? ***(16 pont)***

Megoldás. $100a+10b+c-\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(100a-a^2\right)+\left(10b-b^2\right)+\left(c-c^2\right)$.
Azt kell megvizsgálnunk, hogy a jobb oldali összeg három tagja külön-külön mikor veszi fel a legkisebb értékét, és mennyi ez az érték. ***3 pont***

$10b-b^2=b(10-b)\geq 0$, és az értéke egy esetben lehet nulla, ha $b=0$. ***3 pont***

$c-c^2=c(1-c)$ parabola csúcspontja a $c=\frac{1}{2}$ egyenesen van, a parabola szárai lefelé állnak, így a $c=0, 1, 2, \ldots, 9$ tartományon a $c-c^2$ kifejezés a legkisebb értékét $c=9$-re veszi fel. ***3 pont***

$100a-a^2=a(100-a)$ parabola csúcspontja az $a=50$ egyenesen van, a parabola szárai lefelé állnak, így az $a=1, 2, \ldots, 9$ tartományon a $100a-a^2$ kifejezés a legkisebb értékét $a=1$-re veszi fel. ***3 pont***

A keresett szám a 109.

2 pont

Ezek alapján $\overline{abc}-\left(a^2+b^2+c^2\right)$ legkisebb értéke $\overline{109}-\left(1^2+0^2+9^2\right)=109-82=27$.

2 pont

7. Az ABC háromszög magasságainak talppontjai A_1, B_1, C_1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei $30°$, $60°$ és $90°$. Mekkorák az ABC háromszög szögei? ***(20 pont)***

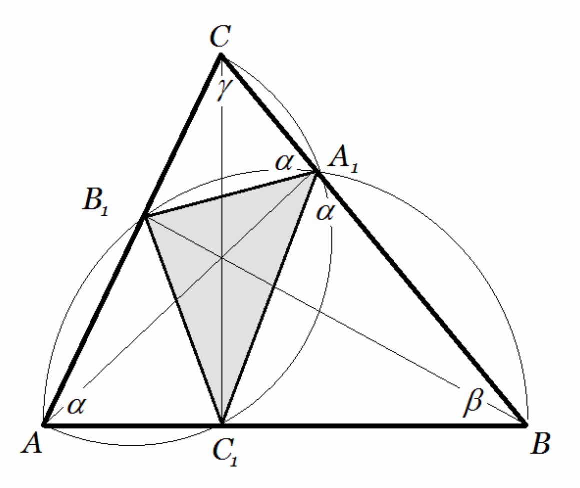
Megoldás. A talpponti háromszög szögeit egészen más módon kaphatjuk meg hegyesszögű és tompaszögű háromszögek esetén.

Nézzük először azt az esetet, ha az ABC háromszög hegyesszögű.

Az AB fölé rajzolt Thalész-körre illeszkednek az A_1, B_1 pontok. Az ABA_1B_1 húrnégyszögben a szemközti szögek összege $180°$, ezért $BA_1B_1\angle = 180° - \alpha$, és így $B_1A_1C\angle = \alpha$.

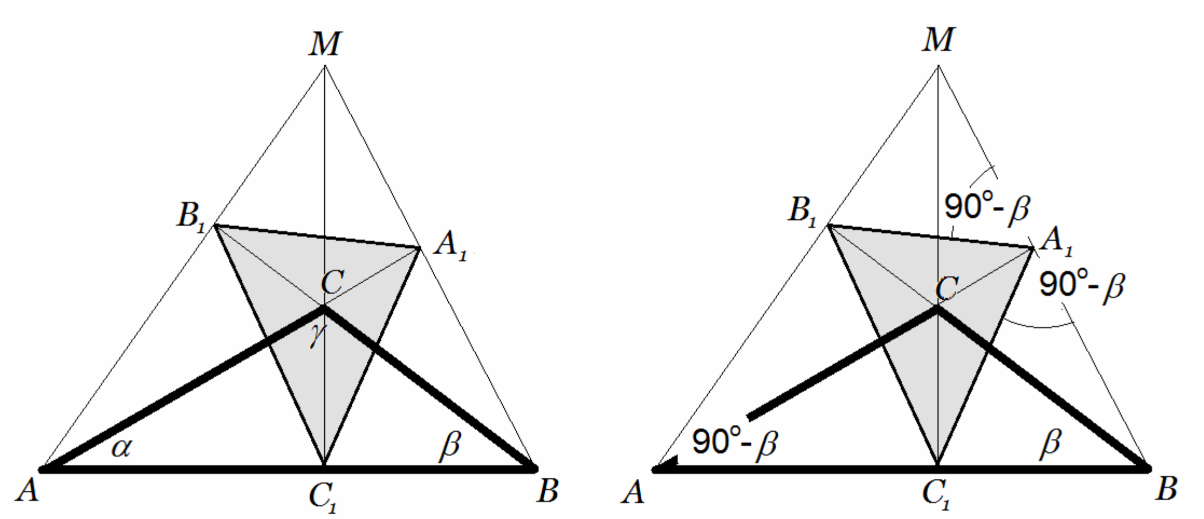
Az AC fölé rajzolt Thalész-körre illeszkednek az A_1, C_1 pontok. Az ACA_1C_1 húrnégyszögben a szemközti szögek összege $180°$, ezért $CA_1C_1\angle = 180° - \alpha$, és így $C_1A_1B\angle = \alpha$.

Ezért a talpponti háromszög $B_1A_1C_1$ szöge $B_1A_1C_1\angle = 180° - 2\alpha$.



A feladat adatai szerint $30° = 180° - 2\alpha$, $60° = 180° - 2\beta$, $90° = 180° - 2\gamma$. Innen az ABC háromszög α, β, γ szögei: $75°$, $60°$ és $45°$.

Nézzük most azt az esetet, ha az ABC háromszög tompaszögű.
Az ABB_1 derékszögű háromszögben B-nél β szög van, így az A-nál lévő szög $90° - \beta$.
Tekintsük az ABM háromszöget.



Az előbbi vizsgálatok szerint $C_1A_1B\angle = B_1A_1M\angle = 90° - \beta$, így a talpponti háromszög A_1-nél lévő szöge $B_1A_1C_1\angle = 2\beta$. Ugyanígy a B_1-nél lévő szög $B_1A_1C_1\angle = 2a$.

A talpponti háromszög harmadik szöge $180° - (2\alpha + 2\beta) = 180° - (360° - 2\gamma) = 2\gamma - 180°$.

A feladat adatai szerint $2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma - 180°$ értékei valamilyen sorrendben $30°$, $60°$ és $90°$. Innen az ABC háromszög $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ szögeinek lehetséges értékei: $15°$, $30°$ és $135°$; $15°$, $45°$ és $120°$; $30°$, $45°$ és $105°$.

Egy lehetőség van még, ha az ABC háromszög derékszögű. Ekkor a talpponti háromszög elfajuló háromszög, a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága lesz. Tehát az eset nem ad megoldást.

Ezek alapján négy megoldás van, az ABC háromszög szögei $(75°,\ 60°,\ 45°)$, vagy $(15°,\ 30°,\ 135°)$, vagy $(15°,\ 45°,\ 120°)$, vagy $(30°,\ 45°,\ 105°)$.

Pontozás: A hegyesszögű háromszög szögeinek megtalálására adjunk ***8 pontot***,
a tompaszögű háromszögekre adjunk ***4+4+4 pontot***
Ha látja, hogy külön kell foglalkozni a hegyesszögű és a tompaszögű háromszöggel, és lényegesen nem jut tovább, arra adjunk ***4 pontot.***

Javítási útmutató
12. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Hányféleképpen lehet kiválasztani az *a, b, c* (nem feltétlenül különböző) számokat az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazból úgy, hogy $a^{\left(b^c\right)}$ osztható legyen 4-gyel? ***(12 pont)***

Megoldás. Az oszthatóság $a = 1$ és $a = 3$ esetén nem teljesül. ***2 pont***

Ha $a = 2$, akkor $b^c \geq 2$ esetén teljesül a 4-gyel való oszthatóság, így $b = 2$, 3 vagy 4, és *c* értéke 1, 2, 3 vagy 4 lehet. Ez $3 \cdot 4 = 12$ lehetőség. ***4 pont***

Ha $a = 4$, akkor *b* és *c* értékét korlátozás nélkül választhatjuk az 1, 2, 3, 4 számok közül. A választási lehetőségek száma $4 \cdot 4 = 16$. ***4 pont***

Összesen $12 + 16 = 28$ esetben osztható 4-gyel az $a^{\left(b^c\right)}$ hatvány. ***2 pont***

2. Az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ egyenlet két gyöke $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$. Bizonyítsuk be, hogy $b^2 = a^2 + 2ac$. ***(12 pont)***

Megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{c}{a}$ és $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{b}{a}$. ***4 pont***

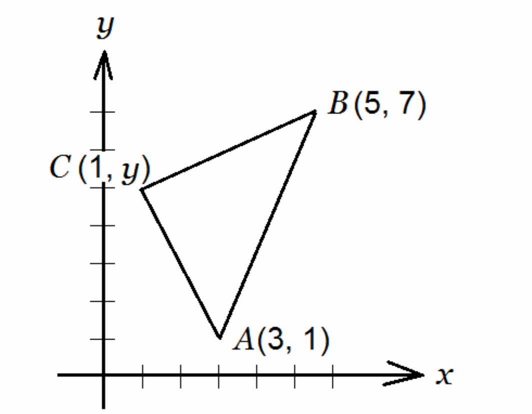
Lássuk be, hogy $b^2 = a^2 + 2ac$, azaz $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{c}{a}$. ***4 pont***

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha =$$

$= 1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 + 2 \cdot \frac{c}{a}$. Tehát igaz az állítás. ***4 pont***

3. Az ABC derékszögű háromszög átfogójának végpontjai $A(3,\ 1)$ és $B(5,\ 7)$. Határozza meg a $C(1,\ y)$ csúcs második koordinátáját. ***(12 pont)***

Megoldás. $BC \perp AC$, ezért $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. *4 pont*



$\overrightarrow{CB}(4,\ 7-y)$, $\overrightarrow{CA}(2,\ 1-y)$, így a skaláris szorzat $4 \cdot 2 + (7-y)(1-y) = 0$. *4 pont*

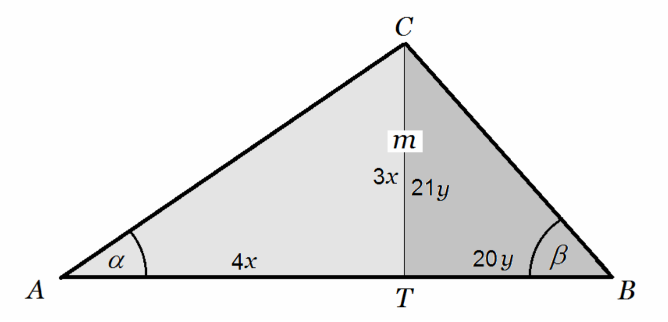
Ebből $y^2 - 8y + 15 = 0$, azaz $(y-5)(y-3) = 0$, $y = 3$ vagy $y = 5$. *2 pont*

A C csúcs második koordinátája 3 vagy 5. *2 pont*

Pontozás: Ha nem oldja meg, de járható a megkezdett út (másképp is megoldható, például egy kör és egy egyenes egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásával), adjunk legalább ***4 pontot***.

4. Az ABC háromszög A, B, C csúcsainál lévő szögek rendre α, β, γ, és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{21}{20}$. Mennyi $\frac{AC}{BC}$? ***(12 pont)***

1. megoldás. A háromszögben a C csúcsból induló magassága $CT = m$.
Az AC és BC oldalakat felírjuk m segítségével, és innen adódik a két oldal aránya.



2 pont

Az ATC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ miatt a két befogó $AT = 4x$, $CT = 3x = m$, így $AT = \frac{4}{3}m$. *2 pont*

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $AC = \sqrt{\left(\frac{4}{3}m\right)^2 + m^2} = \frac{5}{3}m$. *2 pont*

A BTC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\beta = \frac{21}{20}$ miatt a két befogó $BT = 20y$, $CT = 21y = m$, így $BT = \frac{20}{21}m$. *2 pont*

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $BC = \sqrt{\left(\frac{20}{21}m\right)^2 + m^2} = \frac{29}{21}m$. *2 pont*

Ezekből $\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{5}{3}m}{\frac{29}{21}m} = \frac{5}{3} \cdot \frac{21}{29} = \frac{35}{29}$. *2 pont*

2. megoldás. A szinusz-tétel miatt $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. *4 pont*

A tangens értékek vizsgálatához tekintsünk egy-egy alkalmas derékszögű háromszöget.

Ha $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, akkor a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. *3 pont*

Ha $\operatorname{tg}\beta = \frac{21}{20}$ akkor a 20, 21, 29 oldalú derékszögű háromszögben $\sin\beta = \frac{21}{29}$. *3 pont*

Ezekből $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{35}{29}$. *2 pont*

5. Oldja meg az $\frac{1}{3^x + 5} \le \frac{1}{3^{x+1} - 1}$ egyenlőtlenséget a valós számok körében. ***(12 pont)***

Megoldás. Legyen $3^x = t$. Végezzük el ezt a helyettesítést, és oldjuk meg a kapott $\frac{1}{t+5} \le \frac{1}{3t-1}$ egyenlőtlenséget. *2 pont*

$\frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} \le 0$, azaz $\frac{t-3}{(t+5)(3t-1)} \le 0$. *2 pont*

Ennek megoldása $t < -5$, vagy $\frac{1}{3} < t \le 3$. *4 pont*

Tehát két eset van: $3^x < -5$, vagy $\frac{1}{3} < 3^x \le 3$. Az első egyenlőtlenségnek nincs megoldása, hiszen $3^x > 0$. *1 pont*

$\frac{1}{3} < 3^x \le 3$ megoldása $-1 < x \le 1$. *1 pont*

A feladat egyenlőtlenségének megoldása: $-1 < x \le 1$. *2 pont*

6. Keresse meg azt a leghosszabb mértani sorozatot, melynek tagjai különböző számok a $\{100, 101, 102, \ldots, 1000\}$ halmazból. ***(20 pont)***

Megoldás. A keresett sorozat hányadosa racionális szám.

Ha a hányados 2, akkor a sorozat legfeljebb 4 számból áll, egy ilyen sorozat 100, 200, 400, 800. Ha van hosszabb sorozat, akkor a hányados kisebb 2-nél.

Legyen ez a hányados $1 < q = \frac{m}{n} < 2$, ahol $(m, n) = 1$. (Lehet 1-nél kisebb is a hányados.)

A sorozat tagjai $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, \ldots$

Ha a sorozatnak 6-nál több tagja van, akkor a hetedik tag $a \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^6$, ezért az első tag osztható n^6-tal, és az utolsó tag osztható m^6-tal.

$m \le 3$, mert $4^6 > 1000$, tehát utolsó, m^6-tal osztható tag nagyobb 1000-nél.

Mivel $n < m$, ezért $n = 1$ vagy $n = 2$.

Ha $n = 1$, akkor a hetedik tag legalább $100 \cdot 2^6 = 6400$.

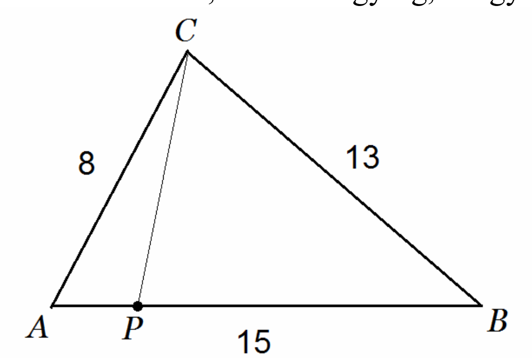
Ha $n = 2$, akkor $m = 3$. A sorozat első tagja osztható 64-gyel, a legkisebb ilyen szám a 128, ám ekkor a sorozatnak csak 6 tagja van. Tehát a sorozatnak nem lehet 7 tagja.

Van 6-tagú mértani sorozat: 128, 192, 288, 432, 648, 972, és ennél hosszabb sorozatot nem találunk. A sorozat hányadosa $\frac{3}{2}$. (Lehet csökkenő is a sorozat. Akkor ugyanezeket a számokat kapjuk csökkenő sorrendben.)

Pontozás:
Ha megadja a 6-tagú sorozatot, arra adjunk ***5 pontot***.
Ha megindokolja, hogy a sorozatnak nem lehet 7 tagja, arra adjunk ***15 pontot***.

Ha nem oldja meg a feladatot,
de megállapítja, hogy a hányados racionális szám, arra adjunk ***2 pontot***,
és ha a megad egy 4 tagú sorozatot arra is adjunk ***2 pontot***.

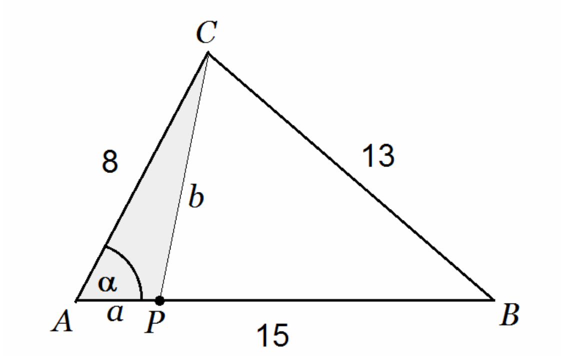
7. Az ABC háromszög oldalainak hossza 8, 13 és 15 egység, ahogyan az ábrán látjuk.



Mekkora az AP szakasz, ha a hossza egész szám, és a CP hossza is egész szám? ***(20 pont)***

Megoldás. Az ABC háromszögben $\cos\alpha = \frac{8^2+15^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 15} = \frac{64+225-169}{240} = \frac{120}{240} = \frac{1}{2}$ (tehát $\alpha = 60°$). ***4 pont***

Az APC háromszögben $\cos\alpha = \frac{8^2+a^2-b^2}{2\cdot 8a} = \frac{1}{2}$, azaz $64+a^2-b^2 = 8a$. ***4 pont***



$(a^2-8a+16)-b^2 = -48$, így $b^2-(a-4)^2 = 48$.
Ha ezt megoldjuk a pozitív egészek körében (tekintettel arra is, hogy $a+b>8$), akkor $(a, b) = (3, 7) = (5, 7) = (8, 8) = (15, 13)$ a megoldások. ***8 pont***

Tehát az AP szakasz hossza 3, 5, 8 vagy 13 lehet. ***4 pont***