Megoldások

(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. A $z = a + \frac{b}{d+\frac{c}{e+f}}$ kifejezésben az a, b c, d, e és f paraméterek értéke 1, 2 vagy 3. Határozzuk meg z legnagyobb értékét!

(10 pont)

Megoldás:

z akkor lesz a legnagyobb, ha a és b maximális, azaz $a = b = 3$.

(2 pont)

A tört nevezőjét viszont a legkisebbnek kell beállítanunk, azaz $d = c = 1$.

(2 pont)

Az $e + f$ értékét maximálisra kell állítani, azaz $e = f = 3$.

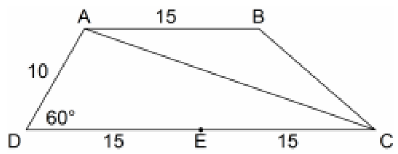
(2 pont)

Így a z legnagyobb értéke: $z = 3 + \frac{3}{1+\frac{1}{3+3}} = \frac{39}{7}$ lesz.

(4 pont)

Összesen: 10 pont

2. Az ábrán látható *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD*, az $ADC\sphericalangle = 60°$, $AD = 10$ és $AB = DE = EC = 15$. Mekkora az *ABC* háromszög területe?



(12 pont)

Megoldás:

Az *A* pontból merőlegest állítva a *DC* alapra a trapéz magassága a 60° ismeretében Pitagorasz-tétel felhasználásával megadható. Ennek nagysága $m = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

(4 pont)

Így az *ABCD* trapéz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{30 + 15}{2} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{225\sqrt{3}}{2}$$

(3 pont)

Az *ACD* háromszög területe

$$T_{ACD} = \frac{30 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$$

(3 pont)

E két terület különbsége adja a keresett területet:

$$T_{ABC} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

(2 pont)

Összesen: 12 pont

3. Egy régi kerékpáron az első és a hátsó kerekek különböző méretűek voltak. Egy ilyen kerékpár esetén 120 méteres szakaszon az első kerék 6-tal többet fordult, mint a hátsó. Ha az első kerék kerületét 25%-kal, a hátsó kerekét 20%-kal megnövelték, akkor ugyanakkora útszakaszon már csak 4-gyel fordult többször az első kerék a hátsóhoz képest. Mekkora volt eredetileg a hátsó kerék kerülete?

(14 pont)

Megoldás:

Legyen az első kerék kerülete k_1, a hátsó keréké pedig k_2. Ha a hátsó kerék n fordulatot tesz meg, akkor az első $n+6$-ot. Így:

$$(n+6)k_1 = 120$$
$$nk_2 = 120$$

(3 pont)

A megnövelt kerületek esetén, ha a hátsó kerék m fordulatot tesz meg, akkor az első $m+4$-et. Így:

$$(m+4)\cdot 1{,}25\cdot k_1 = 120$$
$$m\cdot 1{,}2\cdot k_2 = 120$$

(3 pont)

A hátsó kerékre felírt egyenletek alapján:

$$n = 1{,}2\cdot m$$

(3 pont)

Ezt alapján az első kerékre adódó

$$n+6 = 1{,}25(m+4)$$

egyenletet felhasználva és az egyenletrendszert megoldva:

$$m = 20$$

adódik.

(3 pont)

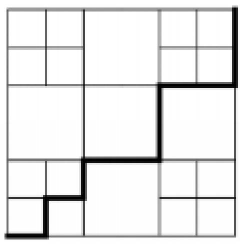
Íg a hátsó kerék kerülete:

$$k_2 = 5\ méter$$

(2 pont)

Összesen: 14 pont

4. Az alábbi ábrán egy park látható felülnézetben, melyben a sétányokat a megrajzolt vonalak jelölik. Valaki a bal alsó sarokból szeretne eljutni a jobb felső sarokba, úgy, hogy mindig közeledik a célja felé. Hányféle útvonal közül választhat? (Egy lehetséges útvonalat jelöl az rajz.)



(14 pont)

Megoldás:

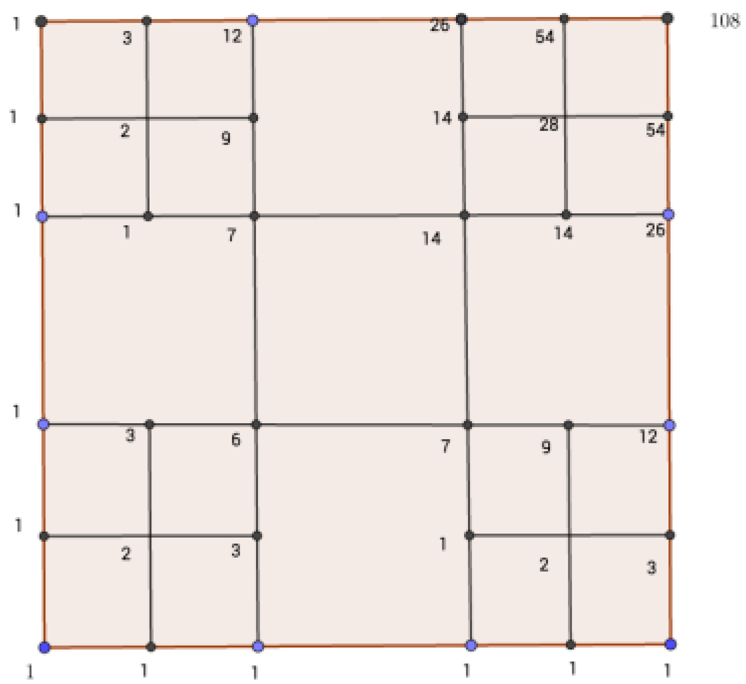
A lehetséges útvonalakat úgy számoljuk össze, hogy a kereszteződésekbe beírjuk az oda beérkező útvonalak számát.

(2 pont)

Ez minden esetben az előző pontokban szereplő számok összege lesz.

(2 pont)

Az ábrát ennek alapján kitöltve kapjuk az alábbi értékeket:



(8 pont)

Tehát a lehetséges útvonalak száma: 108.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

5. Az *a* és *b* egész számok előállnak ugyanazon két nullától különböző *x* és *y* egész számok összegeként illetve szorzataként, azaz

$$a = x + y$$
$$b = xy$$

Adjuk meg azokat az $(x; y)$ számpárokat, melyekre az $a^2 + (b-1)^2$ kifejezés prímszám!

(16 pont)

Megoldás:

Helyettesítsük *a* és *b* értékét a megadott kifejezésekkel:

$$a^2 + (b-1)^2 = (x+y)^2 + (xy-1)^2$$

(2 pont)

Végezzük el az alábbi átalakításokat

$$(x+y)^2 + (xy-1)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2y^2 - 2xy + 1 =$$
$$x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1 = (x^2+1)(y^2+1)$$

(8 pont)

Mivel *x* és *y* nullától különböző egész számok, ezért

$$x^2 + 1 \geq 2$$
$$y^2 + 1 \geq 2$$

(3 pont)

Viszont ahhoz, hogy a kifejezés prímszámot adjon eredményül, a két tényező közül az egyiknek 1-nek kellene lennie. Mivel ez nem lehetséges, ezért nincsenek olyan nullától különböző egészek, melyekre a kifejezés prímszámot eredményezne.

(3 pont)

Összesen: 16 pont

6. Adott a síkon 100 pont. Igaz-e, hogy minden esetben tudunk olyan kört rajzolni, amely ezeket a pontokat pontosan két egyenlő részre osztja?

(16 pont)

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy ilyen kör minden esetben létezik.

(2 pont)

Tekintsük az összes lehetséges pontpárt, amely 100 megadott pontból képezhető. Rajzoljuk meg minden pontpárhoz a szakaszfelező merőlegesét. Ezek olyan pontokat jelölnek ki, melyek legalább e két ponttól ugyanakkora távolságra vannak.

(6 pont)

Ezután válasszunk egy olyan pontot, amelyik egyik szakaszfelezőre sem illeszkedik. Ilyen pont biztosan van, hiszen a véges sok egyenes nem fedheti le az egész síkot.

(4 pont)

Ha ezt a pontot egy kör középpontjának választjuk, melynek sugarát fokozatosan növeljük, akkor, mivel ez középpont minden ponttól különböző távolságra helyezkedik el, a kör a megadott pontokat egyesével „nyeli el". Azaz biztosan lesz egy olyan sugár, amikor a pontok közül pontosan 50 lesz a kör belsejében és 50 a körön kívül.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

7. A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 számokat tartalmazó számkártyákból kilencjegyű számokat készítünk. Ezek között hány olyan öttel osztható szám van, melyben a két 2-es nem áll egymás mellett?

(18 pont)

Megoldás:

Először határozzuk meg az öttel osztható számok számát. Ezekből kétféle lehet, azok, amelyek 0-ra, illetve 5-re végződnek.

A 0-ra végződő számok száma: $\frac{8!}{3!2!} = 3360$.

(4 pont)

Az 5-re végződő számokat úgy kapjuk meg, hogy a összes lehetséges képezhető számok számából kivonjuk a 0-val kezdődő számok számát: $\frac{8!}{3!2!} - \frac{7!}{3!2!} = 3360 - 420 = 2940$.

(6 pont)

Így összesen $3360 + 2940 = 6300$ öttel osztható számot készíthetünk.

(2 pont)

Ezeket között olyan, amelyben a két 2-es egymás mellett áll $\frac{7!}{3!} + \frac{6 \cdot 6!}{3!} = 840 + 720 = 1560$ van.

Így a keresett számok száma $6300 - 1560 = 4740$.

(6 pont)

Összesen: 18 pont

Megoldások

(10. osztály)

1. Egy túrós és két mákos rétes háromszor annyiba kerül, mint egy almás. Hét túrós és egy mákos rétes nyolcszor annyiba kerül, mint egy almás. Mi kerül többe: egy túrós vagy egy mákos rétes?

(10 pont)

Megoldás:
Legyen az túrós rétes ára *t*, a mákosé *m* és az almásé *a*. Így teljesül a következő:

$$t + 2m = 3a$$
$$7t + m = 8a$$

(4 pont)

Az első egyenletet 8-cal, a másodikat 3-mal szorozva és kivonva egymásból

$$t = m$$

adódik.

(4 pont)

Tehát a túrós és mákos rétes ugyanannyiba kerül.

(2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Határozzuk meg az $A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^4$ kifejezés értékét, ha $xy = 3$ és $x^2 + y^2 = 18$.

(12 pont)

Megoldás:

Felhasználva a megadott értékeket:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 18 + 6 = 24$$

(5 pont)

Másrészt:

$$A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^4 = \frac{(x + y)^4}{(xy)^4}$$

(5 pont)

Így:

$$A = \frac{24^2}{3^4} = \frac{8^2}{3^2} = \frac{64}{9}$$

(2 pont)

Összesen: 12 pont

3. Az iskolai sakkszakkörben az összes résztvevő hetede lány. A jó reklámnak köszönhetően a szakkör létszáma tizenhárommal bővült. Így több lett a lány, bár az arányuk csökkent. Mennyivel nőt a fiúk száma a szakkörben?

(12 pont)

Megoldás:
Ha eredetileg a lányok száma a szakkörben *x* volt, akkor a fiúk számát $6x$ határozza meg. Jelölje a fiúk számának növekedését y. Így a létszám bővülése után a fiúk száma $6x + y$ lesz, a lányok száma pedig $x + 13 - y$.

(4 pont)

Mivel a lányok aránya csökkent, ezért:

$$\frac{x+13-y}{7x+13} < \frac{1}{7}$$

Ebből átrendezéssel:

$$\frac{78}{7} < y$$

Mivel *y* egész szám, ezért $12 \leq y$ adódik.

(6 pont)

A lányok száma is növekedett, így $y = 12$ lehet csak, így a fiúk száma ennyivel növekedett.

(2 pont)

Összesen: 12 pont

4. Egy kerékpárverseny során a távot a versenyzők két helység között ugyanazon az útvonalon teszik meg. Az út emelkedőkből és lejtőkből áll. Az egyik versenyző odafelé 3 óra, visszafelé pedig 3 óra 20 perc alatt teljesítette a távot. Milyen messze van a két helység egymástól, ha a sebessége lejtőn 30 km/h, emelkedőn pedig 20 km/h volt?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje az odafelé útvonalon az emelkedők hosszát *x*, a lejtők hosszát *y*. Nyílván ez azt jelenti, hogy visszafelé a lejtők hossza lesz majd *x* és az emelkedőké pedig *y*. Ennek megfelelően a következő egyenletrendszert írhatjuk fel.

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{30} = 3$$
$$\frac{x}{30} + \frac{y}{20} = \frac{10}{3}$$

(5 pont)

Mindkét egyenletet 60-nal beszorozva:

$$3x + 2y = 180$$
$$2x + 3y = 200$$

(3 pont)

A két egyenletet összeadva:

$$5(x+y) = 380$$
$$x + y = 76$$

adódik.

(4 pont)

Tehát a két helység közötti távolság 76 km.

(2 pont)

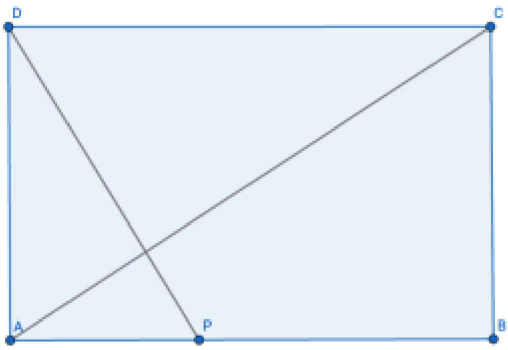
Összesen: 14 pont

5. Az *ABCD* téglalap területe $25\sqrt{3}$. Jelölje *P* az *AB* oldal *A*-hoz közelebbi harmadolópontját. Tudjuk, hogy a *PD* szakasz merőleges az *AC* átlóra. Mekkora az *ABCD* téglalap kerülete?

(16 pont)

Megoldás:

Készítsünk ábrát és jelöljük az *ABCD* téglalap *AB* oldalát *a*-val, *BC* oldalát *b*-vel.



(3 pont)

Mivel adott a téglalap területe, ezért

$$ab = 25\sqrt{3}$$

(3 pont)

Másrészt a feltételek miatt, az $APD\Delta$ hasonló lesz a $BCA\Delta$-höz, így

$$\frac{\frac{a}{3}}{b} = \frac{b}{a}$$

(4 pont)

Ezt átrendezve:

$$a = \sqrt{3}b$$

adódik.

(2 pont)

Ezt a feltételt és a területet figyelembe véve: $b = 5$ és $a = 5\sqrt{3}$. Azaz a téglalap kerülete:

$$k = 10\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

(4 pont)

Összesen: 16 pont

6. Melyik az a legkisebb pozitív n természetes szám melyre az $\frac{n-17}{6n+11}$ tört egyszerűsíthető?

(18 pont)

Megoldás:

Keressük azt a legkisebb pozitív n természetes számot, amelyre az $n - 17$ és a $6n + 11$ nem relatív prímek, azaz $(n - 17; 6n + 11) \neq 1$. Ebben az esetben tudunk csak egyszerűsíteni.

(2 pont)

Használjuk fel, ha egy a és b természetes szám legnagyobb közös osztója c, azaz $(a; b) = c$, akkor $(a; b - ka) = c$, ahol k tetszőleges egész szám lehet.

(4 pont)

Ennek megfelelően:

$$(n - 17; 6n + 11) = \left(n - 17; 6n + 11 - 6(n - 17)\right) = (n - 17; 113)$$

(6 pont)

Mivel a 113 prímszám, így a legnagyobb közös osztó csak 1 vagy a 113 lehet.

(2 pont)

A legkisebb szám melyre 113 lesz a legnagyobb közös osztó

$$n - 17 = 113$$

azaz $n = 130$ esetén teljesül.
Valóban, ekkor $\frac{130-17}{6\cdot 130+11} = \frac{113}{791} = \frac{1}{7}$.

(4 pont)

Összesen: 18 pont

7. 50 számkártyát 1-től 50-ig megszámozunk. Közülük véletlenszerűen kiválasztunk ötöt, majd ezeket nagyság szerint sorba rendezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a középső szám nagyobb lesz 30-nál?

(18 pont)

Megoldás:

Az összes lehetséges számötös száma ahányféleképpen kiválaszthatunk az 50 kártya közül ötöt úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel. Ez $\binom{50}{5} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2118760$.

(4 pont)

Először határozzuk meg azoknak a számötösöknek a számát, melyekben a két legkisebb szám nem nagyobb 30-nál. Ezek száma: $\binom{30}{2}\cdot\binom{20}{3} = 435\cdot 1140 = 495900$.

(4 pont)

Azon számötösök száma, melyekben csak egy szám lesz 30-nál nem nagyobb: $\binom{30}{1}\cdot\binom{20}{4} = 30\cdot 4845 = 145350$.

(4 pont)

Végül lesznek olyan számötösök, melyekben mind az öt szám 30-nál nagyobb lesz, ezek száma: $\binom{20}{5} = 15504$.

(4 pont)

Így a keresett valószínűség: $P = \frac{656754}{2118760} = \frac{46911}{151340} \approx 0{,}31$.

(2 pont)

Összesen 18 pont