13 + 1 érv a matematika szépsége mellett

Veres Pál, Miskolc

1. feladat

Száz darab kártyára felírták az első száz pozitív egész számot (minden kártyára csak egy számot írva), majd beletették a kártyákat egy dobozba. Anna kihúz véletlenszerűen egy kártyát, majd Balázs is egyet. Összeadják a kezükben lévő kártyákon található számokat, ha az összeg páratlan, akkor Anna nyer, ha páros, akkor Balázs. Igazságos-e ez a játék? Mi a helyzet, ha Anna egy harmadik kártyát is kihúz, és a fenti szabályt alkalmazzák a három kihúzott kártyára?

Megoldás:

Anna számára a különböző paritású számok kihúzása a nyerő, Balázs számára az azonos paritásúaké. Ha Anna kihúzott egy számot, akkor abból a paritásúból 49 marad a dobozban, az ellentétes paritásúból pedig 50. Ezért Balázs nagyobb valószínűséggel húz az Annáéval ellentétes paritású számot, így Annának nagyobb az esélye, tehát a játék nem igazságos.
Három szám esetén hasonlítsuk össze az Anna és a Balázs számára nyerő lehetőségek számát. Próbáljuk párba rendezni a páros és a páratlan összegű számhármasokat! Az (a; b; c) számhármashoz rendeljük az $(a+1; b+1; c+1)$ számhármast.
Ha a, b, c valamelyike 100, akkor a nála eggyel nagyobb 101 helyett 1-et írunk.
Mivel $a+1+b+1+c+1=a+b+c+3$, így ez ellentétes paritású, mint az $a+b+c$.
Így minden páros összegű számhármashoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendeltünk egy páratlan összegű számhármast. Így tehát a két csoportban ugyanannyi számhármas van, ezért egyforma eséllyel következik be mindkét lehetőség, vagyis a játék most igazságos.

2. feladat

Egy körvonalon felveszünk 2009 darab kék és egy darab piros színű pontot. Vizsgáljuk az összes olyan konvex sokszöget, amelynek minden csúcsa a felvett pontok közül való. A piros csúcsot tartalmazó, vagy a piros csúcsot nem tartalmazó sokszögekből van több?