

Félig szabályos poliéderek

Kiss Géza, Budapest

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy

- a.) nem létezik olyan poliéder, amelynek hatnál kevesebb éle van, továbbá
- b.) nem létezik olyan poliéder sem, amelynek hét éle van, viszont
- c.) bármilyen ennél nagyobb élszámú poliéder létezik.

Megoldás:

- a.) Legyen egy tetszőleges poliéder egyik lapja L . Az L lapnak legalább három oldala van, sőt kell lennie legalább egy olyan A csúcsnak is, amely nincs ezen a lapon. Abból is legalább három él indul ki, amely a korábbiak mindegyikétől különbözik, ez már legalább hat él.
- b.) Tegyük fel, hogy van hétélű poliéderünk. Akkor ennek szükségképpen mindegyik lapja háromszög. Ellenkező esetben a legalább négyszögletű lap mindegyik csúcsában lenne még legalább egy-egy él, amely nem tartozik ehhez a laphoz, így az élek száma legalább nyolc lenne. Tehát, ha van ilyen poliéder, akkor annak mindegyik lapja háromszög. Számoljuk össze az éleket a lapok mentén: $3 \cdot l = 2 \cdot 7 = 14$. A lapok számára nem adódna egész szám. (A csupa háromszög lapokból álló poliéder éleinek száma osztható 3-mal.)
- c.) Páros n -re vegyünk olyan gúlát, amelynek alaplapja $\frac{n}{2}$ oldalú sokszög. Páratlan n -re (n egy kilencnél nem kisebb páratlan szám!) első lépésként tekintsünk egy $\frac{n-3}{2}$ oldalú gúlát, ennek $n-3$ éle van. Ha az alapsíkhoz tartozó valamelyik csúcs szögletét levágjuk úgy, hogy csak az alapot és a csúcsban található két oldallapot vágjuk át, akkor az így keletkező poliédernek pontosan $n-3+3 = n$ éle lesz.

2. feladat

Van-e olyan 7 lapú poliéder, amelynek minden lapja négyszög?