Kitűzött feladatok – csütörtök

7. osztály

1. a) Bizonyítsuk be, hogy egy kocka éleit nem lehet az 1, 2, 3, …, 12 számokkal úgy megszámozni, hogy minden csúcsnál összeadva a belőle kiinduló három élre írt számokat, ugyanazokat az összegeket kapjuk.
   b) Melyik számot kellene a 13-ra cserélni, hogy a kívánt számozás elvégezhető legyen?

2. Az ABC egyenlőszárú háromszögben $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 78°$. A D és E pontok az AB és AC oldalakon úgy helyezkednek el, hogy $BCD\sphericalangle = 24°$ és $CBE\sphericalangle = 51°$.
   Határozzuk meg a $BED\sphericalangle$ -et.

8. osztály

1. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben csak két különböző számjegy van?

2. Mekkora a trapéz területe, ha párhuzamos oldalai 3 és 12, átlói 9 és 12 egység hosszúak?

9. osztály

1. Oldja meg a
$$\left[\frac{20}{x+18}\right]+\left[\frac{x+18}{20}\right]=1$$
   egyenletet, ahol $[x]$ jelöli x egészrészét, vagyis azt a legnagyobb egész számot, ami még nem nagyobb, mint x.

2. Az $ABCD$ trapézban $AB\|CD$. k_1 és k_2 két olyan kör, melyek átmérői a trapéz AD és BD szárai. Legyen X és Y két tetszőlegesen választott pont a k_1 illetve k_2 körökön. Bizonyítsuk be, hogy az XY szakasz hossza nem több, mint az $ABCD$ trapéz kerületének fele. Mi az egyenlőség feltétele?

10. osztály

1. Oldjuk meg az
$$\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=\frac{8}{x}$$
egyenletet, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét, $\{x\}$ pedig a törtrészét jelenti!

2. Határozd meg a $x^4+y^4+\frac{1}{x^2y^2}$ kifejezés minimumát, ahol x és y nullától különböző valós számok!

11. osztály

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a való számok halmazán!
$$(x^{2010}-1)y^{2019}\left(\sqrt{x}-1\right)=(y^{2010}-1)x^{2019}\left(\sqrt{y}-1\right)$$

2. Egy körvonalon véletlenszerűen kijelölünk 3 különböző pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy húzható a körben olyan átmérő, melynek azonos oldalán (vagy az átmérő végpontján) vannak a kijelölt pontok?

Beadási határidő: péntek 8^{00}