Kitűzött feladatok – szerda

7. osztály

1. Lúdas Matyi éjszaka a libalegelőn a csillagos égboltban gyönyörködött. Az egyik csillagképben 15 csillagot figyelt meg, és közülük semelyik három nem volt egy egyenesen. Gondolatban mindegyiket összekötötte az összes többivel egy egyenessel. Észrevette, hogy minden metszéspontban pontosan két összekötő egyenes találkozik. Aztán azon töprengett, vajon hogyan kellene egy egyenessel kettéosztani a csillagok halmazát úgy, hogy a legtöbb összekötő egyenest elmetssze. Segíts Matyinak! Hány egyenest lehet maximálisan elmetszeni?
2. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 15°, átfogója 20 cm. Mekkora a háromszög területe?

8. osztály

1. Egy háromjegyű pozitív egész szám jegyeinek összege egy prímszám négyzete, a számjegyek szorzata egy prímszám köbe. Add meg az összes ilyen háromjegyű számot.
2. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szárai 13 cm hosszúak. Mekkora a területe, a beírt és körülírt kör sugara?

9. osztály

1. Ugyanaz, mint a 8. osztály első feladata.
2. Milyen n pozitív egész szám esetén lesz $8n^2+10n+3$ prímszám?

10. osztály

1. Legyenek $x, y, z \in [-2,2]$ olyan 0-tól különböző valósak, melyek összege 0. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét.

2. Adott n pozitív egészre legyenek a, b azok a relatív prím pozitív egészek, melyekkel

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{a}{b}$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ha $3n+1$ prímszám, akkor osztója a-nak.

11. osztály

1. Igazoljuk, hogy bármely négy darab valós szám közül kiválasztható kettő (jelöljük a, b-vel őket) úgy, hogy teljesül rájuk az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2+b^2+a^2b^2}}>\frac{1}{2}$$

2. Legyen n egy rögzített pozitív egész. Két játékos, Aladár és Béla a következő játékot játsszák: Aladárral kezdve felváltva mondanak olyan egynél nagyobb egészeket, melyek prímtényezős felbontásában csak az első n darab prím szerepelhet, és az újonnan mondott szám nem osztható egyik korábban mondott számmal sem. A soron következő játékos veszít, ha nem tud megfelelő számot mondani.
   a) Igazoljuk, hogy bárhogy is játszanak, a játék véges sok lépésben véget ér.
   b) Mutassuk meg, hogy az összes lehetséges pozitív egész n értékek legalább 2/3-ában Aladárnak van nyerő stratégiája.

Beadási határidő: csütörtök 8[00]